



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2011  
الموضوع



الصفحة
1
4

9	المعامل	NS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإجابة	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعبة (ة) أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(4ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات..... (2.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (4 نقط) الجزء الأول والثاني مستقلان

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{ نعتبر المصفوفتين } (M_3(\mathbb{R}), +, \times)$$

(نضع:  $A^0 = I$  و  $A^1 = A$  و  $A^2 = A \times A$  و  $A^{n+1} = A^n \times A$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ )

0.5 ن-1 بين أن:  $(\forall k \in \mathbb{N}) A^{2k} = I$

0.5 ن-2 بين أن المصفوفة  $A$  تقبل مقلوبا  $A^{-1}$  ينبغي تحديده.

الجزء الثاني: ليكن  $a$  عددا حقيقيا .

لكل  $x$  و  $y$  من المجال  $]a, +\infty[$  نضع:  $x * y = (x-a)(y-a) + a$

0.5 ن-1 (أ) بين أن  $*$  قانون تركيب داخلي في  $I$  .

0.5 ن-2 (ب) بين أن القانون  $*$  تبادلي و تجميعي.

0.5 ن-3 (ج) بين أن  $(I, *)$  يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

0.5 ن-4 بين أن  $(I, *)$  زمرة تبادلية.

3- نعتبر التطبيق:  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$x \mapsto \frac{1}{x-a}$$

0.5 ن-5 (أ) بين أن التطبيق  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(I, *)$  نحو  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

0.5 ن-6 (ب) حل في المجموعة  $I$  المعادلة:  $x^{(3)} = a^3 + a$  حيث:  $x^{(3)} = x * x * x$

التمرين الثاني: (2.5 نقط)

ليكن  $N$  العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي:  $N = \underbrace{111\dots\dots 11}_{2010 \text{ مر } 1^5}$

0.25 ن-1 بين أن العدد  $N$  يقبل القسمة على 11

0.75 ن-2 (أ) تحقق أن العدد 2011 أولي و أن  $10^{2010} - 1 = 9N$

0.5 ن-3 (ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد  $9N$

0.5 ن-4 (ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد  $N$

0.5 ن-5 -3 بين أن العدد  $N$  يقبل القسمة على 22121

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

الجزء الأول: ليكن  $m$  عددا عقديا غير منعدم. نعتبر في المجموعة  $\square$  المعادلة ذات المجهول  $z$ :

$$(E_m): z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

1- تحقق أن العدد  $z_1 = -m + 2$  حل للمعادلة  $(E_m)$  0.5ن

2- ليكن  $z_2$  الحل الثاني للمعادلة  $(E_m)$

(أ) بين أن:  $im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0 \Leftrightarrow z_1 z_2 = 1$  0.5ن

(ب) حدد قيمتي  $m$  بحيث:  $z_1 z_2 = 1$  1ن

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر التطبيق  $S$  الذي يربط النقطة  $M$  التي لحقها  $z$  بالنقطة  $M'$  التي لحقها  $z'$  بحيث:  $z' - 1 = -(z - 1)$

و الدوران  $R$  الذي مركزه النقطة  $\Omega$  ذات اللق  $(1+i)$  وقياس زاويته  $\frac{\pi}{2}$  وليكن  $z''$  لحق النقطة  $M'' = R(M)$

1- (أ) بين أن التطبيق  $S$  هو الثمائل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللق 1 0.25ن

(ب) بين أن:  $z'' = iz + 2$  0.25ن

2- نفترض أن النقطة  $M$  تخالف النقطة  $O$  أصل المعلم ولتكن  $A$  النقطة التي لحقها 2

(أ) احسب  $\frac{z'' - 2}{z' - 2}$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $AM'M''$  0.5ن

(ب) حدد مجموعة النقط  $M$  بحيث تكون النقط  $A$  و  $\Omega$  و  $M'$  و  $M''$  متداورة. 0.5ن

التمرين الرابع: (6.5 نقط)

الجزء الأول: دراسة الحلول الموجبة للمعادلة:  $e^x = x^n$  حيث  $n$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجموعة  $D = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  بما يلي:  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$  ;  $x \neq 0$   
 $f(0) = 0$

و ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1- تحقق أنه لكل  $x$  من المجموعة  $[0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  لدينا:  $e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$  0.25ن

2- بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 0.5ن

3- احسب النهايات:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها. 1.5ن

4- ادرس تغيرات الدالة  $f$  على كل من المجالين  $[0, 1[$  و  $]1, +\infty[$  ثم أعط جدول تغيراتها. 0.75ن

5- بين أن المنحنى  $(C)$  يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتها. 0.5ن

6- انشئ المنحنى  $(C)$  0.5ن

7- بين أنه إذا كان  $n \geq 3$  فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين  $a_n$  و  $b_n$  بحيث:  $1 < a_n < e < b_n$

0.5ن

الجزء الثاني: دراسة تقارب المتتاليتين  $(a_n)_{n \geq 3}$  و  $(b_n)_{n \geq 3}$

1- بين أن:  $(\forall n \geq 3) b_n \geq n$  ثم استنتج نهاية المتتالية  $(b_n)_{n \geq 3}$

0.5ن

2- (أ) بين أن المتتالية  $(a_n)_{n \geq 3}$  تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

0.5ن

(ب) بين أن:  $(\forall n \geq 3) \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$  ثم استنتج نهاية المتتالية  $(a_n)_{n \geq 3}$

0.5ن

(ج) بين أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = e$

0.5ن

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بما يلي:  $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

1- (أ) بين أن:  $(\forall x \geq 0) 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

0.5ن

(ب) بين أن:  $(\forall x \geq 1) e^{-x^2} \leq e^{-x}$  ثم استنتج نهاية الدالة  $F$  عند  $+\infty$

0.5ن

2- بين أن  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  وأن:  $(\forall x \geq 0) F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$

0.5ن

3- نعتبر الدالة العددية  $G$  المعرفة على المجال  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  بما يلي:  $G(x) = F(\tan x)$  ;  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$   
 $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

(أ) بين أن الدالة  $G$  متصلة على اليسار في  $\frac{\pi}{2}$ .

0.25ن

(ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي  $c$  من المجال  $]0; +\infty[$  بحيث:  $F'(c) = 0$  وأن:  $F(c) = \frac{1}{2c} e^{-2c^2}$

0.75ن

(يمكنك تطبيق مبرهنة رول (ROLLE) بالنسبة للدالة  $G$  على المجال  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ )

4- نعتبر الدالة العددية  $H$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بما يلي:  $H(x) = F'(x) \frac{e^{x^2}}{2x}$

(أ) بين أن الدالة  $H$  تناقصية قطعاً على المجال  $]0; +\infty[$

0.5ن

(ب) استنتج أن العدد  $c$  وحيد ثم أعط جدول تغيرات الدالة  $F$ .

0.5ن

**انتهى**