

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2013

الموضوع



NS24



4	مدة الإختبار	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين والمسألة حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- المسألة تتعلق بالتحليل.....(10ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقط)

نذكر أن $(\square, +, \times)$ حلقة واحدة تبادلية و كاملة .

1- نزود \square بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرفة بما يلي: $x * y = x + y - 2$; $(\forall (x, y) \in \square^2)$

(أ) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . 0.5

(ب) بين أن $(\square, *)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.25

(ج) بين أن $(\square, *)$ زمرة تبادلية . 0.5

2- نزود \square بقانون التركيب الداخلي T المعرفة بما يلي: $xTy = xy - 2x - 2y + 6$; $(\forall (x, y) \in \square^2)$

ونعتبر التطبيق f من \square نحو \square المعرفة بما يلي: $f(x) = x + 2$; $(\forall x \in \square)$

(أ) بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من (\square, \times) نحو (\square, T) 0.5

(ب) بين أن: $(x * y)Tz = (xTz) * (yTz)$; $(\forall (x, y, z) \in \square^3)$ 0.25

3- استنتج من كل ما سبق أن $(\square, *, T)$ حلقة تبادلية و واحدة. 0.75

4- (أ) بين أن: $xTy = 2$ إذا و فقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$ 0.25

(ب) استنتج أن الحلقة $(\square, *, T)$ كاملة . 0.25

(ج) هل $(\square, *, T)$ جسم؟ (علل جوابك) 0.25

التمرين الثاني: (3.5 نقط)

I - ليكن a عددا عقديا غير منعدم.

نعتبر في المجموعة \square المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$: (E)

1- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$ 0.25

2- حل في \square المعادلة (E) 0.5

II - المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر النقط A و B و M التي ألقاها على التوالي a و $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ و z

ليكن r الدوران الذي مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{3}$

نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$ (حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

1- تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع. 0.5

2- (أ) بين أن : $b_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ 0.5

(ب) بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي الأضلاع. 0.5

3- نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$

(أ) بين أن : $\frac{z - b_1}{z - a_1} = -\frac{z - b}{z - a} \times \frac{a}{b}$ 0.5

(ب) بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة. 0.75

التمرين الثالث: (3 نقط)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1 و التي تحقق الخاصية :

$$(R): 3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{n}$$

1- نفترض أن n يحقق الخاصية (R) و ليكن p أصغر قاسم أولى موجب للعدد n

(أ) بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{p}$ ثم استنتج أن $p \geq 5$ 0.75

(ب) بين أن : $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ و $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 0.5

(ج) بين أنه يوجد زوج (a, b) من \mathbb{Z}^2 بحيث : $an - b(p-1) = 1$ 0.5

(د) ليكن r و q باقي و خارج القسمة الاقليدية للعدد a على $p-1$ 0.5

$$(a = q(p-1) + r) \text{ حيث : } 0 \leq r < p-1 \text{ و } q \in \mathbb{Z}$$

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$

2- استنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 يحقق الخاصية (R) 0.75

مسألة: (10 نقط)

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي : $h(1) = 1$ و $h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$ ($\forall x > 1$)

الجزء الأول:

1- (أ) بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 0.25

(ب) بين أن : $\ln x < x - 1$ ($\forall x > 1$) ثم استنتج أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $]1, +\infty[$ 0.75

2- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h 0.5

(ب) استنتج أن : $0 < h(x) \leq 1$ ($\forall x \geq 1$) 0.25

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي : $g(1) = \ln 2$ و $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$ ($\forall x > 1$)

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

0.25 (أ-1) تحقق أن : $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$; $(\forall x > 1)$

0.25 (ب) تحقق أن : $g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt$; $(\forall x > 1)$

0.5 (ج) بين أن : $g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt$; $(\forall x > 1)$

0.5 (أ-2) بين أن : $(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$; $(\forall x > 1)$

0.5 (ب) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

0.75 (ج) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

0.75 (أ-3) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1, +\infty[$ و أن : $g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$; $(\forall x > 1)$

0.5 (ب) استنتج أن : $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \geq 1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

0.5 (ج) أنشئ المنحنى (C)

الجزء الثالث:

0.5 I-1 بين أن الدالة $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ تقابل من المجال $]1, +\infty[$ نحو المجال $]-\infty, \ln 2]$

0.25 2- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1, +\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$

II- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $1 \leq u_0 < \alpha$ و $u_{n+1} = 1 + g(u_n)$; $(\forall n \geq 0)$

0.5 (أ-1) بين أن : $1 \leq u_n < \alpha$; $(\forall n \geq 0)$

0.5 (ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً.

0.75 (ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

0.5 (أ-2) بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$; $(\forall n \geq 0)$

0.5 (ب) بين أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$; $(\forall n \geq 0)$

0.25 (ج) استنتج مرة ثانية أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

انتهى