

## الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2014  
الموضوع

NS 24

ⵜⴰⵎⴰⵏⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵉⵜ  
ⵜⴰⵎⴰⵏⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵉⵜ  
ⵏ ⵏⵓⵔⵉⵜ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(8ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

## التمرين الأول: (3 نقط)

لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  نضع :  $a_n = \underbrace{333\dots31}_{n \text{ مرة}}$  (  $n$  مرة الرقم 3 )

1- تحقق أن العددين  $a_1$  و  $a_2$  أوليان. 0.5

2- بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $3a_n + 7 = 10^{n+1}$  0.5

3- بين أن لكل  $k$  من  $\mathbb{N}$  :  $10^{30k+2} \equiv 7 \pmod{31}$  0.75

4- بين أن لكل  $k$  من  $\mathbb{N}$  :  $3a_{30k+1} \equiv 0 \pmod{31}$  ، ثم استنتج أن 31 يقسم  $a_{30k+1}$  0.75

5- بين أنه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  ، إذا كان  $[30] \nmid n$  فإن المعادلة  $a_n x + 31y = 1$  لا تقبل حولا في  $\mathbb{Z}^2$  0.5

## التمرين الثاني: (3.5 نقطة)

نذكر أن  $(\square, +, \times)$  جسم تبادلي و أن  $(M_2(\square), +, \times)$  حلقة واحدة صفرها  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لكل  $a$  و  $b$  من  $\square$  ، نضع :  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$  ونعتبر المجموعة :  $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \square^2\}$

1- بين أن  $E$  زمرة جزئية للزمرة  $(M_2(\square), +)$ . 0.5

2- احسب  $J^2 = J' J$  حيث :  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ثم استنتج أن  $E$  جزء غير مستقر من  $(M_2(\square), \times)$  0.75

3- نعرف على  $M_2(\square)$  قانون التركيب الداخلي \* بما يلي :  $A * B = A \times N \times B$  حيث :  $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ونعتبر التطبيق  $\varphi$  من  $\square^*$  نحو  $M_2(\square)$  الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم  $a + ib$  (  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان ) بالمصفوفة  $M(a, b)$ .

(أ) بين أن  $\varphi$  تشاكل من  $(\square^*, \times)$  نحو  $(M_2(\square), *)$  0.5

(ب) نضع :  $E^* = E - \{O\}$ . بين أن :  $\varphi(\square^*) = E^*$  0.25

(ج) بين أن  $(E^*, *)$  زمرة تبادلية. 0.5

4- بين أن :  $(\forall (A, B, C) \in E^3) A * (B + C) = A * B + A * C$  0.5

5- استنتج مما سبق أن  $(E, +, *)$  جسم تبادلي. 0.5

## التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

ليكن  $\theta$  عددا حقيقيا بحيث:  $q = \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4}$

1- نعتبر في المجموعة  $\square$  المعادلة التالية:  $(E) \quad z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

أ) تحقق أن مميز المعادلة  $(E)$  هو:  $D = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$  0.25

ب) اكتب على الشكل المثلي  $z_1$  و  $z_2$  حل المعادلة  $(E)$  في المجموعة  $\square$ . 0.75

2- نعتبر النقط  $I$  و  $J$  و  $T_1$  و  $T_2$  و  $A$  التي ألقاها على التوالي 1 و -1 و  $e^{i\frac{p}{4}}$  و  $e^{i\frac{p}{4}}$  و  $\sqrt{2}e^{iq}$

أ) بين أن المستقيمين  $(OA)$  و  $(T_1T_2)$  متعامدان . 0.5

ب) ليكن  $K$  منتصف القطعة  $[T_1T_2]$  . بين أن النقط  $O$  و  $K$  و  $A$  مستقيمية. 0.25

ج) استنتج أن المستقيم  $(OA)$  هو واسط القطعة  $[T_1T_2]$ . 0.25

3- ليكن  $r$  الدوران الذي مركزه  $T_1$  و قياس زاويته  $\frac{p}{2}$

أ) اعط الصيغة العقدية للدوران  $r$ . 0.25

ب) تحقق أن لحق النقطة  $B$  صورة النقطة  $I$  بالدوران  $r$  هو:  $b = \sqrt{2}e^{iq} + i$  0.5

ج) بين أن المستقيمين  $(IJ)$  و  $(AB)$  متعامدان . 0.25

4- حدد لحق النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالإزاحة التي متجهتها  $\begin{pmatrix} 1 \\ -v \end{pmatrix}$  0.25

5- بين أن النقطة  $A$  هي منتصف القطعة  $[BC]$ . 0.25

## التمرين الرابع: (8 نقط)

$$f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}; \quad x > 0$$

$$f(0) = 0$$

I - نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي:

1- أ) بين أن الدالة  $f$  متصلة على المجال  $[0, +\infty[$  0.5

ب) أدرس إشارة  $f(x)$  على المجال  $[0, +\infty[$  0.25

2- أ) بين أن:  $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$   $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$  0.25

ب) بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  0.25

ج) بين أن:  $(\exists \alpha \in ]0,1[) \quad f'(\alpha) = 0$  0.5

د) استنتج أن:  $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$  0.5

II - نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $F$  في معلم متعامد ممنظم.

1- أ) تحقق أن:  $(\forall t \in [1, +\infty[) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$  0.5

ب) بين أن:  $(\forall x \in [1, +\infty[) \quad F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$  1

(لاحظ أن:  $F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt$ )

ج) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$  ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. 1

2- أ) بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  ثم أحسب  $F'(x)$  0.5

ب) أدرس تغيرات الدالة  $F$  على المجال  $[0, +\infty[$  0.25

III- 1- أ) بين أن:  $(\forall t \in ]0, +\infty[) \quad -t \ln t \leq \frac{1}{e}$  0.5

ب) بين أن:  $(\forall t \in [0, +\infty[) \quad f(t) \leq \frac{1}{e}$  0.25

ج) استنتج أن:  $F(x) < x$   $(x \in ]0, +\infty[)$  0.25

2- نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 \in ]0, 1[$  و  $u_{n+1} = F(u_n)$   $(n \in \mathbb{N})$

أ) بين أن:  $u_n \in ]0, 1[$   $(n \in \mathbb{N})$  0.5

ب) بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.5

ج) حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  0.5

## التمرين الخامس: (2 نقط)

$$g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} ; x > 0$$
$$g(0) = 0$$

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي:

1- بين أن الدالة  $g$  متصلة على المجال  $[0, +\infty[$  0.5

2- لكل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0, +\infty[$ ، نضع  $L(x) = \int_x^1 g(t) dt$

أ) بين أن الدالة  $L$  متصلة على المجال  $[0, +\infty[$  0.25

ب) أحسب  $L(x)$  من أجل  $x > 0$  0.25

ج) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$  ثم استنتج قيمة  $L(0)$  0.5

3- لكل عدد صحيح طبيعي  $n$  أكبر من أو يساوي 1 نضع:  $s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

بين أن المتتالية  $(s_n)_{n \geq 1}$  متقاربة ثم حدد نهايتها. 0.5

انتهى