20,00	على 20
عشرون نقطة	بالحروف

مادة : الرياضيات

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

287399

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

(ص 1)

التمرين الأول :

1) أ- لدينا $\vec{AB}(-1;0;-1)$ و $\vec{AC}(0;2;-1)$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 2 \\ \vec{k} & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (-1\times 0-(-2))\vec{i} - (1+0)\vec{j} + (-2-0)\vec{k} = 2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

وبالتالي $\vec{AB}\wedge\vec{AC} = 2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

0,5

لدينا $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\neq\vec{0}$ ، وبالتالي فإن ~~.....~~ المتجهتان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مستقيميتان، وبالتالي فالنقط A و B و C غير مستقيمية.

0,25

ب- لدينا المستوى (ABC) موجه بالمتجهتان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$، ولأن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مستقيميتين لأن A و B و C غير مستقيمية فإن ~~....~~ المتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}(2,-1,-2)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) ، وبالتالي المعادلة ديكارتية للمستوى (ABC) هي:

$(ABC):\ 2x-y-2z+d=0$

بما أن $C(0,5,0)\in(ABC)$ فإن : $2.0-5-2.0+d=0 \Rightarrow d=5$

وبالتالي : $(ABC):\ 2x-y-2z+5=0$

0,5

2) أ- لدينا المعادلة الديكارتية للفلكة (S) هي: $(S):\ x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

$(S):\ x^2+y^2+z^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x^2-4x+y^2+z^2-5=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+y^2+z^2=5 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+z^2=9$

$\Leftrightarrow (S):(x-2)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=3^2$

وبالتالي فإن الفلكة (S) مركزها $\Omega(2;0;0)$ ، وشعاعها $R=3$

0,5

ب- لدينا $(ABC):\ 2x-y-2z+5=0$ ، $\Omega(2;0;0)$

$$d(\Omega;(ABC)) = \frac{|2x_\Omega-y_\Omega-2z_\Omega+5|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{|4+5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

0,5

بما أن $d(\Omega;(ABC))=R=3$ ، فإن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) .

0,25

ص ٤

ج- نعتبر النقطة $H(x_H, y_H, z_H)$ نقطة تماس المستوى (ABC) والفلكة (S).

نعتبر المستقيم (D) مار من Ω مركز الفلكة (S) و (D) عمودي على المستوى (ABC)، بحيث يقطع المستوى (ABC) في النقطة H.

* لنحدد التمثيل البارامتري للمستقيم (D):

لدينا المستقيم (D) عمودي على المستوى (ABC)، وبالتالي فإن (D) موجه بالمتجهة المنظمية للمستوى (ABC)، والمتجهة المنظمية للمستوى (ABC) هي $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(2,-1,-2)$

وبالتالي فإن المستقيم (D) موجه بالمتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(2,-1,-2)$، وبما أن المستقيم (D) يمر من النقطة $\Omega(2,0,0)$، فإن تمثيل بارامتري للمستقيم (D) هو:

$$(D): \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

* لنحدد إحداثيات النقطة $H(x_H, y_H, z_H)$

لدينا $H(x_H, y_H, z_H)$ هي نقطة تقاطع المستوى (ABC) والمستقيم (D)

وبالتالي:

$$H(x_H, y_H, z_H) \in (ABC) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+2t \\ y_H = -t \\ z_H = -2t \\ 2x_H - y_H - 2z_H + 5 = 0 \quad (1) \end{cases} \quad / \exists t \in \mathbb{R}$$

لنعوض x_H، y_H و z_H في (1)،

$$2(2+2t) - (-t) - 2(-2t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 4+4t+t+4t+5=0$$

$$\Leftrightarrow 9t+9=0 \Leftrightarrow t=-1$$

وبالتالي ~~$H(x_H, y_H, z_H)$~~

$$\begin{cases} x_H = 2+2(-1) = 0 \\ y_H = -(-1) = 1 \\ z_H = -2(-1) = 2 \end{cases}$$

إذن $H(0, 1, 2)$

0,5

امتحان شهادة البكالوريا

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

مادة : الرياضيات

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

ص3

التمرين الثالث:

$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7 ; n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 13 \end{cases}$

1) لنبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} ; \quad u_n < 14$

لدينا من أجل $n=0$، لدينا $u_0 = 13$ فإن $13 < 14$ أي $u_0 < 14$ وبالتالي فإن العبارة صحيحة من أجل $n=0$.

لنفترض أن $u_n < 14$

ولنبين أن $u_{n+1} < 14$

حسب الافتراض $u_n < 14$

وبالتالي $u_n < 14 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n < 7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 7 < 7+7$

$\Leftrightarrow u_{n+1} < 14$

وبالتالي حسب مبرهنة الترجع فإن: $\forall n \in \mathbb{N} ; \; u_n < 14$

2- أ) لدينا $\forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_n = 14 - u_n$

$\forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_{n+1} = 14 - u_{n+1} = 14 - \left(\frac{1}{2}u_n + 7\right) = 14 - \frac{1}{2}u_n - 7$

$= 7 - \frac{1}{2}u_n = \frac{2}{2}\left(7 - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}(14 - u_n) = \frac{1}{2}v_n$

وبما أن $\forall n \in \mathbb{N} ; \; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$، فإن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

* لنكتب v_n بدلالة n:

لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول هو v_0 حيث:

$v_0 = 14 - u_0 = 14 - 13 = 1$

وبالتالي، $\forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_n = v_0 . q^n = 1 . \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبالتالي فإن: $\forall n \in \mathbb{N} ; \; v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ص 4

ب - لدينا $\forall n\in\mathbb{N};\ V_n=14-U_n$ و $\forall n\in\mathbb{N};\ V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$V_n = 14 - U_n \Leftrightarrow V_n + U_n = 14 \Leftrightarrow U_n = 14 - V_n$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N};\ V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ فإن $U_n = 14 - V_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N};\ U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

0,25

لنحسب نهاية U_n:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا $-1<\frac{1}{2}<1$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n = 14$

0,5

7- لنحدد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $U_n > 13,99$

لدينا $U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ وبالتالي،

$U_n > 13,99 \Leftrightarrow 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 13,99$

$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n > 13,99 - 14$

$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n > -0,01 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,01$

$\Rightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < \ln(0,01) \Rightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(0,01)$

$\Rightarrow n < \dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow n < 6,64$

0,5

وبالتالي أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $U_n > 13,99$ هي

$n = 7$

التمرين الرابع:

1 حساب احتمال الحدث A:

الحدث A: " مجموع العددين اللذين تحملهما البيدقتين المسحوبتين يساوي 1 "

يتحقق الحدث A إذا تم سحب بيدقة تحمل الرقم 0 وبيدقة تحمل الرقم 1 أي " (1) (0) "

وبالتالي احتمال الحدث A هو:

كون الإمكانيات هو: $Card\,\Omega = C_9^2 = 36$

إذن: $P(A) = \dfrac{Card\,A}{Card\,\Omega} = \dfrac{C_5^1 \cdot C_4^1}{C_9^2} = \dfrac{5\times 4}{36} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$

1

7

(ص 6)

* لنبين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ؛

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1+\ln x)^2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$

وبالتالي $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1+\ln x)^2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=0$

أي : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

-2- لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ،

وبالتالي منحنى الدالة f ، (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

3) أ- لدينا $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$ وبالتالي

$$\forall x\in]0;+\infty[\,;\quad f'(x)=\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}\right)'=\left((1+\ln x)^2\right)'+\left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=2(1+\ln x)'(1+\ln x)-\frac{(x^2)'}{x^4}=2\cdot\frac{1}{x}(1+\ln x)-\frac{2x}{x^4}$$

$$=\frac{2}{x}(1+\ln x)-\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x}\left(1+\ln x-\frac{1}{x^2}\right)=2\frac{g(x)}{x}$$

وبالتالي $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$

* لدينا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ لأن $\forall x\in]0;+\infty[\,;x>0$

- لنستنتج أن الدالة f تناقصية على $]0;1]$:

لدينا حسب (I-2) : $\forall x\in]0;1]\,;\ g(x)\leq 0$

وبما أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ فإن $\forall x\in]0;1]\,;\ f'(x)\leq 0$

بما أن $\forall x\in]0;1]\,;\ f'(x)\leq 0$ ، فإن الدالة f تناقصية على $]0;1]$

- لنستنتج أن الدالة f تزايدية على $[1;+\infty[$

لدينا حسب (I-2) ، $\forall x\in[1;+\infty[\,;\ g(x)\geq 0$

وبما أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ فإن $\forall x\in[1;+\infty[\,;\ f'(x)\geq 0$

بما أن $\forall x\in[1;+\infty[\,;\ f'(x)\geq 0$ فإن الدالة f تزايدية على $[1;+\infty[$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$ هي A حيث:

$A = \int_1^e |f(x)|\,dx \; u.a$

بما أن الدالة f دالة متصلة على $[1,e]$ و $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; f(x) \geq 2$

أي $\forall x \in [1,e] \; ; \; f(x) > 0$

فإن $\forall x \in [1,e] \; ; \; |f(x)| = f(x)$

وبالتالي $\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left((1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

إذن $\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (1+\ln x)^2\,dx + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx$

$= J + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = J + \int_1^e \frac{(x)'}{x^2}\,dx = J + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$

$= J + \left(-\frac{1}{e} + 1\right) = 2e - 1 - \frac{1}{e} + 1 = 2e - \frac{1}{e}$

وبالتالي $A = \left(2e - \frac{1}{e}\right) u.a$

ولدينا $u.a = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| = 1cm \cdot 1cm = 1cm^2$

فإن $A = \left(2e - \frac{1}{e}\right) cm^2$

ب - جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$

لدينا الدالة f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$

ولدينا $\forall x\in]0;+\infty[\ : \ f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2g(x)}{x}=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

(لأن $g(1)=0$)

وبالتالي جدول تغيرات الدالة f هو:

$f(1)=(1+\ln(1))^2+\frac{1}{1}=1+1=2$

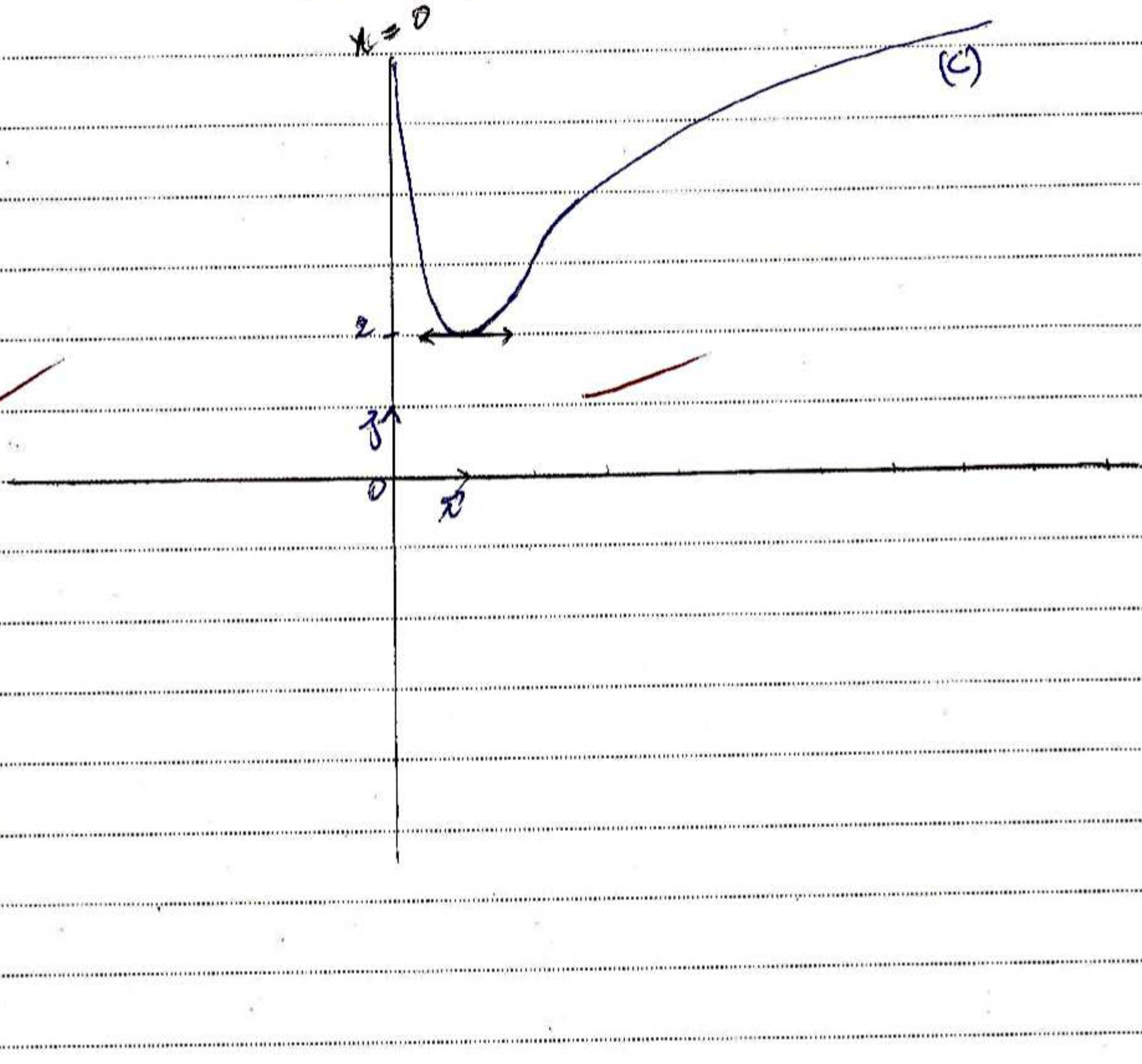
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

حسب جدول تغيرات الدالة f، فإن الدالة f تقبل قيمة دنوية عند $x=1$ على $]0;+\infty[$

وهي $f(1)=2$ - وبالتالي $\forall x\in]0;+\infty[,\ f(x)\geq f(1)$

أي $\forall x\in]0;+\infty[;\ f(x)\geq 2$

(4



12,0

5) أ- لنبين أن $H: x \mapsto x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto 1+\ln x$ على $]0;+\infty[$

لدينا: $\forall x \in]0;+\infty[,\ H'(x) = (x\ln x)' = (x)'\ln x + (\ln x)' x$

$= \ln x + \frac{1}{x}\cdot x = 1+\ln x = h(x)$

0,25

إذن $\forall x \in]0;+\infty[,\ H'(x) = h(x)$

فإن $H(x) = x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h(x) = 1+\ln x$ على $]0;+\infty[$.

0,25

* لنستنتج أن $I = e$.

$$I = \int_1^e (1+\ln x)\,dx$$

علما أن $H(x) = x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h(x) = 1+\ln x$ على $]0;+\infty[$

فإن علما $[1,e] \subset]0;+\infty[$ و $h(x) = 1+\ln x$ إذن:

$$I = \int_1^e (1+\ln x)\,dx = [x\ln x]_1^e = (e\ln e) - (1\cdot\ln 1) = e - 0 = e$$

وبالتالي $I = e$

ب- لنحسب باستعمال المكاملة بالأجزاء $J = 2e-2$

لدينا $J = \int_1^e (1+\ln x)^2\,dx$

نضع $\begin{cases} u(x) = (1+\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u'(x) = 2(1+\ln x)'(1+\ln x) = \frac{2}{x}(1+\ln x) \\ v(x) = x \end{cases}$

باستعمال المكاملة بالأجزاء نجد:

$$\cancel{J = [x(1+\ln x)^2]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{2}{x}(1+\ln x)\,dx = [x(1+\ln x)^2]_1^e - \int_1^e 2(1+\ln x)}$$

$$\cancel{= e(1+\ln e)^2 - 1(1+\ln(1))^2 - (2(1+\ln e) - 2(1+\ln(1)))}$$

$$\cancel{= e\cdot 2^2 - (1+0)^2 - (2(1+1) - 2) = 4e - 1 - (4-2) = 4e-1}$$

$$J = [x(1+\ln x)^2]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{2}{x}(1+\ln x)\,dx = [x(1+\ln x)^2]_1^e - 2\int_1^e (1+\ln x)$$

$$= [x(1+\ln x)^2]_1^e - 2I = \left(e(1+\ln e)^2 - 1(1+\ln(1))^2\right) - 2I$$

0,5

$$= \left(e(2)^2 - (1+0)^2\right) - 2I = (4e-1) - 2I = 4e - 1 - 2I$$

علما: $I = \int_1^e (1+\ln x)\,dx = e$ فإن:

$$J = 4e - 1 - 2I = 4e - 1 - 2e = 2e - 1$$

2) أ- لنبين أن احتمال فوز سعيد هو $\frac{1}{6}$:

نعتبر الحدث B "سحب بيدقتان تحملان الرقم 1"

يتحقق الحدث B اذا تم سحب بيدقتان تحملان الرقم 1 أي "(1)(1)"

وبالتالي احتمال الحدث B هو:

كون امكانيات، $\text{card}\,\Omega = C_9^2 = 36$

إذن

$$P(B) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

وبالتالي احتمال فوز سعيد هو $\frac{1}{6}$.

ب- يلعب سعيد اللعبة السابقة ثلاث مرات، ويعيد البيدقتين المسحوبتين إلى الكيس

في كل مرة، وبالتالي $n=3$, $p = P(B) = \frac{1}{6}$

نعتبر الحدث C "يفوز سعيد باللعبة السابقة مرتين بالضبط حسب الشروط

التي وصفها" إذن $k=2$.

إذن احتمال C هو:

$$P(C) = C_n^k (P(B))^k \cdot (1-P(B))^{n-k}$$

$$= C_3^2 (P(B))^2 \cdot (1-P(B))^1 = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^1$$

$$= C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{36}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{36}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72}$$

إذن احتمال لكي يفوز سعيد مرتين بالضبط هو: $\frac{5}{72}$

المسألة:

I) 1)

$$\forall x \in]0;+\infty[;\ g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

$$\forall x \in]0;+\infty[;\ g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)' = \frac{(x^2)'}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$$

وبالتالي $\forall x \in]0;+\infty[;\ g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$

- لدينا $\forall x \in]0;+\infty[;\ x>0$ و $\forall x \in]0;+\infty[;\ x^3>0$

وبالتالي $\forall x \in]0;+\infty[;\ \frac{1}{x}>0$ و $\forall x \in]0;+\infty[;\ \frac{2}{x^3}>0$

إذن $\forall x \in]0;+\infty[;\ \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} > 0$

أي $\forall x \in]0;+\infty[;\ g'(x) > 0$

- بما أن $\forall x \in]0;+\infty[;\ g'(x)>0$ فإن الدالة g دالة تزايدية على $]0;+\infty[$

	20
	بالحروف

مادة : الرياضيات

التقدير المفسر للنقطة

بكتابة الإمتحان

(ه) و توقيعه(ها)

(5ص)

II) 1) $\forall x \in]0;+\infty[: f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = "\frac{1}{0^+}" = +\infty$

وبالتالي $\lim_{x\to 0^+} (1+\ln x)^2 = +\infty$ إذن $\lim_{x\to 0^+} (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

ومنه : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

- بما أن $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ إذن منحنى الدالة f (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

2) أ- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = "\frac{1}{+\infty}" = 0$

وبالتالي $\lim_{x\to+\infty} (1+\ln x)^2 = +\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

أي $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب- لنبين أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln((\sqrt{x})^2))^2}{(\sqrt{x})^2}$

نضع $t = \sqrt{x}$ وبالتالي فإنه عندما يؤول x إلى $+\infty$ $(x\to+\infty)$ فإن t تؤول إلى $+\infty$ $(t\to+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln((\sqrt{x})^2))^2}{(\sqrt{x})^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(1+\ln t^2)^2}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1+2\ln t}{t}\right)^2$

$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t} + 2\cdot\frac{\ln t}{t}\right)^2$

لدينا $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ إذن $\lim_{t\to+\infty} 2\frac{\ln t}{t} = 0$

ولدينا $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$ إذن $\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t} + \frac{2\ln t}{t}\right)^2 = 0$

وبالتالي $\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$

0,5

0,25

0,5

EXAMEN DU BACCALLAUREAT

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
L'ACADÉMIE RÉGIONALE DU GRAND CASABLANCA

COMPOSITION DE : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chifrée :

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

ص14

2) * لنتحقق أن $g(1)=0$ ،

لدينا $\forall x \in]0;+\infty[,\ g(x) = 1-\frac{1}{x^2}+\ln x$ وبالتالي:

$g(1) = 1-\frac{1}{1^2}+\ln(1) = 1-1+0=0$

إذن $g(1)=0$

* لنستنتج أن $\forall x \in]0,1] ;\ g(x) \le 0$

ليكن x عنصراً من $]0,1]$ إذن، $x \le 1$

بما أن الدالة g تزايدية على $]0;+\infty[$ فإن، $\forall x\in]0,1] ;\ g(x)\le g(1)$

بما أن $g(1)=0$ فإن، $\forall x\in]0,1]\ \ g(x)\le 0$

وبالتالي فإن، $\forall x\in]0,1] ;\ g(x)\le 0$

* لنستنتج أن $\forall x\in[1;+\infty[:\ g(x)\ge 0$

ليكن x عنصراً من $[1;+\infty[$ إذن، $x\ge 1$

بما أن الدالة g تزايدية على $]0;+\infty[$ فإن، $\forall x\in[1;+\infty[;\ g(x)\ge g(1)$

بما أن $g(1)=0$ فإن، $\forall x\in[1;+\infty[\ \ g(x)\ge 0$

وبالتالي $\forall x\in[1;+\infty[:\ g(x)\ge 0$

التمرين الثاني :

1) لنحل المعادلة : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$

مميز هذه المعادلة : $\Delta = b^2 - 4ac = 2 - 4\times 1\times(2) = 2 - 8 = -6$

وبالتالي حلول هذه المعادلة هي باعتبار $a = 1$, $b = -\sqrt{2}$, $c = 2$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

و

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

أي $S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \, ; \, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \right\}$

2) أ- لدينا $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

إذن $|u| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{6}{4}}$

$= \sqrt{\frac{6+2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$

وبالتالي معيار العدد u هو $\sqrt{2}$ لأن $|u| = \sqrt{2}$

ولدينا

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i\right)$$

وبالتالي $\arg u \equiv \frac{\pi}{3} \, [2\pi]$

ب- لدينا $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i\right)$

$$u^6 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i\right)\right)^6 = (\sqrt{2})^6\left(\cos\left(6\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(6\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 2^3\left(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right) = 8\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) = 8$$

لأن $2\pi \equiv 0 \, [2\pi]$ و $\begin{cases} \cos(0) = 1 \\ \sin(0) = 0 \end{cases}$

إذن $u^6 = 8 \in \mathbb{R}$

فإن u^6 عدد حقيقي لأن 8 عدد حقيقي.

3) أ- لدينا $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

وبالتالي $R(M) = M' \iff OM = OM'$ و $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{3} \, [2\pi]$

$\iff |z - 0| = |z' - 0|$ و $\arg\left(\frac{z' - 0}{z - 0}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \, [2\pi]$

$\iff \frac{|z' - 0|}{|z - 0|} = 1$ و $\arg\left(\frac{z' - 0}{z - 0}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \, [2\pi]$

$\iff \left|\frac{z'}{z}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \, [2\pi]$

$\iff \frac{z'}{z} = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Note définitive sur 20

COMPOSITION DE : ....

Appréciations expliquant la note chifrée :

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

16

0,5

لدينا: $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

وبالتالي $\frac{z'}{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

أي $\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z$

ب- لنتحقق أن B هي صورة A بالدوران R:

$R(A) = B \Leftrightarrow b = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) a$

0,25

لدينا: $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) a = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(4 - 4i\sqrt{3})$

$= \frac{4}{2} - \frac{4}{2}\sqrt{3} i + \frac{4}{2}\sqrt{3} i - \frac{4}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} i^2$

$= 2 - 2\sqrt{3} i + 2\sqrt{3} i + 2\cdot 3 = 2 + 6 = 8 = b$

وبالتالي $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) a = b \Rightarrow R(A) = B$

وبالتالي فإن B هي صورة A بالدوران R.

ج- لنستنتج أن المثلث OAB متساوي الأضلاع:

0,25

لدينا B هي صورة A بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وبالتالي:

$R(A) = B \Leftrightarrow OA = OB$ و $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

إذن $OA = OB$ و $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ، إذن المثلث OAB متساوي الأضلاع