

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

NS 24

ⵜⴰⵎⴰⵏⴰⵏⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵔⴰⵏⵉ  
ⵜⴰⵎⴰⵏⴰⵏⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵔⴰⵏⵉ  
ⵏ ⵍⵎⴰⵔⴰⵏⵉ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم  
والامتحانات والتوجيه



4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنى الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

نذكر أن  $(M_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$  حلقة واحدة وحدتها  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  و أن  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  جسم تبادلي.

لكل  $(x, y)$  من  $\mathbb{C}^2$ ، نضع:  $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$  و  $E = \{M(x, y); (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

1- بين أن  $E$  زمرة جزئية للزمرة  $(M_3(\mathbb{C}), +)$  0.5

2- تحقق أن: 0.5

$$M(x, y) \cdot M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

3- نضع  $E^* = E - \{M(0, 0)\}$  ونعتبر التطبيق:  $\mathbb{C}^2 \rightarrow E^*$ :  $(x, y) \mapsto z = x + iy$  بالمصفوفة

$M(x, y)$  من  $E$ ، حيث الزوج  $(x, y)$  من  $\mathbb{C}^2$

(أ) بين أن  $z$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  نحو  $(E^*, \cdot)$  0.25

(ب) استنتج أن  $(E^*, \cdot)$  زمرة تبادلية و أن عنصرها المحايد هو  $M(1, 0)$  0.75

4- بين أن  $(E, +, \cdot)$  جسم تبادلي. 0.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(أ) أحسب  $M(x, y) \cdot A' \cdot M(x, y)$  من أجل  $M(x, y)$  عنصر من  $E$  0.5

(ب) استنتج أن كل عنصر من عناصر  $E$  لا يقبل ماثلا في  $(M_3(\mathbb{C}), \cdot)$  0.5

التمرين الثاني: (3 نقط)

الجزء الأول: ليكن  $(a, b)$  عنصرا من  $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$  بحيث العدد الأولي 173 يقسم  $a^3 + b^3$

1- بين أن:  $[173] \mid a^{171} \equiv -b^{171}$  (لاحظ أن:  $171 = 3 \times 57$ ) 0.25

2- بين أن: 173 يقسم  $a$  إذا و فقط إذا كان 173 يقسم  $b$  0.25

3- نفترض أن 173 يقسم  $a$ . بين أن 173 يقسم  $a + b$  0.25

4- نفترض أن 173 لا يقسم  $a$

(أ) باستعمال ميرهنة فيرما بين أن:  $[173] \mid a^{172} \equiv b^{172}$  0.5

(ب) بين أن:  $[173] \mid a^{171}(a + b) \equiv 0$  0.5

(ج) استنتج أن 173 يقسم  $a + b$  0.5

الجزء الثاني: نعتبر في  $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$  المعادلة التالية:  $(E) \quad x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$

ليكن  $(x, y)$  عنصرا من  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  حلا للمعادلة  $(E)$ ؛ نضع:  $x + y = 173k$ ، حيث  $k \in \mathbb{R}^*$

1- تحقق أن:  $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$  0.25

2- بين أن:  $k = 1$  ثم حل المعادلة  $(E)$ . 0.5

**التمرين الثالث: (3.5 نقط)**

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و موجه  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر نقطتين  $M_1$  و  $M_2$  من المستوى العقدي بحيث النقط  $O$  و  $M_1$  و  $M_2$  مختلفة مثنى مثنى و غير مستقيمة.

ليكن  $z_1$  و  $z_2$  لحقي  $M_1$  و  $M_2$  على التوالي و لتكن  $M$  النقطة التي لحقها  $z$  يحقق العلاقة:  $z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$

1- (أ) بين أن:  $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$  0.5

(ب) استنتج أن النقطة  $M$  تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث  $OM_1M_2$  0.5

2- بين أنه إذا كانت  $z_2 = \bar{z}_1$  فإن  $M$  تنتمي إلى المحور الحقيقي. 0.5

3- نفترض أن  $M_2$  هي صورة  $M_1$  بالدوران  $r$  الذي مركزه  $O$  و قياس زاويته  $\alpha$  حيث  $\alpha$  ينتمي إلى  $]0, \pi[$

(أ) احسب  $z_2$  بدلالة  $z_1$  و  $\alpha$  0.5

(ب) استنتج أن النقطة  $M$  تنتمي إلى واسط القطعة  $[M_1M_2]$  0.5

4- ليكن  $\theta$  عددا حقيقيا معلوما من  $]0, \pi[$

نفترض أن  $z_1$  و  $z_2$  هما حلا للمعادلة:  $6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$

(أ) بدون حساب  $z_1$  و  $z_2$  تحقق أن:  $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$  0.5

(ب) أعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي  $z$  بدلالة  $\theta$ . 0.5

**التمرين الرابع: (7 نقط)**

**الجزء الأول:**

1- بتطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة  $t \mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعاً  $x$  يوجد عدد حقيقي 0.5

$\theta$  محصور بين 0 و  $x$  بحيث:  $e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$

2- استنتج أن:

(أ)  $1 - x < e^{-x}$  ;  $(x > 0)$  0.25

(ب)  $x + 1 < e^x$  ;  $(x > 0)$  0.25

(ج)  $0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$  ;  $(\forall x > 0)$  0.25

**الجزء الثاني:**

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:  $f(0) = 1$  و  $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$  إذا كان  $x > 0$

و ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

0.5 1- أ) بين أن الدالة  $f$  متصلة على اليمين في  $0$

0.5 ب) بين أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$  ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.25 2- أ) بين أن:  $x - \frac{x^2}{2} \leq e^{-x} + 1$  ("  $x^3 > 0$ ) (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- أ) من الجزء الأول)

0.5 ب) استنتج أن:  $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$  ("  $x^3 > 0$ )

0.5 3- أ) تحقق أن:  $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$  ("  $x > 0$ )

0.75 ب) استنتج أن:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$  ثم أول النتيجة المحصل عليها.

0.75 4- أ) بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  وأن  $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$  ("  $x > 0$ )

0.5 ب) استنتج أن الدالة  $f$  تزايدية قطعا على  $]0, +\infty[$ . (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ب) من الجزء الأول)

### الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 > 0$  و  $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$  لكل عدد صحيح طبيعي  $n$

0.5 1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي  $n$  لدينا:  $u_n > 0$

0.5 2- بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ج) من الجزء الأول)

0.5 3- بين أن  $0$  هو الحل الوحيد للمعادلة:  $\ln(f(x)) = x$  ثم حدد نهاية المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$

### التمرين الخامس: (3 نقط)

نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي:  $F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$

0.5 1- أ) أدرس إشارة  $F(x)$  لكل  $x$  من  $I$

0.5 ب) بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  و احسب  $F'(x)$  لكل  $x$  من  $I$ .

0.25 ج) بين أن الدالة  $F$  تزايدية قطعا على المجال  $I$

0.5 2- أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع:  $u = \sqrt{e^t - 1}$  ، بين أنه لكل  $x$  من  $I$  لدينا:

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

0.5 ب) احسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

0.25 3- أ) بين أن الدالة  $F$  تقابل من المجال  $I$  نحو مجال  $J$  يتم تحديده.

0.5 ب) حدد التقابل العكسي  $F^{-1}$  للتقابل  $F$ .

انتهى