ROYAUME DU MAROC

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
ACADEMIE REGIONALE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION
REGION DE TANGER-TETOUAN-AL HOCEIMA

Série / Option : Science mathématique B

EXAMEN DU BACCALAUREAT

RESERVE AU SECRETARIAT

COMPOSITION DE : Mathématique

NOTE DEFINITIVE

Sur ...

Appréciations de la note chiffrée

Nom du correcteur et signature :

feuille ①

Exercice 1 :

1) On a : • $E \neq \emptyset$ car $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$ $((0,0) \in \mathbb{R}^2)$

• Soient $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de E où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$

$M(-x',-y') = \begin{pmatrix} -x'-y' & 0 & 2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ -y' & 0 & -x'+y' \end{pmatrix}$

étant la symétrie de $M(x',y')$ dans $(M_3(\mathbb{R}),+)$ et on a :

$M(x,y) + M(-x',-y') = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x'-y' & 0 & +2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ -y' & 0 & -x'+y' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x+y-x'-y' & 0 & -2y+2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y-y' & 0 & x-y-x'+y' \end{pmatrix}$

0,5

$= \begin{pmatrix} y-y'+(x-x') & 0 & -2(y-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y-y' & 0 & (x-x')-(y-y') \end{pmatrix}$

$= M(x-x', y-y') \in E$ car $(x-x', y-y') \in \mathbb{R}^2$

Donc E est un sous groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$

2) $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2)$

$M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$

N.B : il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') + (-2yy') & 0 & -2y'(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y'(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' + yy' + x'y + xy' - 2yy' & 0 & -2yx' - 2y'x + 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ yx' + y'x & 0 & xx' + yy' - x'y - xy' - 2yy' \end{pmatrix}$$

0,5

$$= \begin{pmatrix} (xx' - yy') + (xy' + yx') & 0 & -2(xy' + yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ xy' + yx' & 0 & (xx' - yy') - (xy' + yx') \end{pmatrix}$$

$= M(xx' - yy', xy' + yx')$

~~3) a) Montrons que φ bijective de $\mathbb{C}^*$ dans E.~~

~~Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$~~

~~Soit $M(a,b) \in E$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$~~

~~On a : $\varphi(z) = M(a,b) \Leftrightarrow \varphi(x+iy) = M(a,b)$~~

~~$\Leftrightarrow M(x,y) = M(a,b)$~~

~~$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b \end{pmatrix}$~~

0

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} y = b \\ x - y = a - b \end{cases}$~~

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$~~

~~$\Rightarrow M(a,b) = M(x,y)$~~

~~Donc, tout élément de E admet un et un seul antécédant dans $\mathbb{C}^*$~~

~~Par la suite, φ est bijective de $\mathbb{C}^*$ dans E.~~

3) a) Montrons que φ est un homomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans E

Soient $\begin{cases} z = x + iy \in \mathbb{C}^* \\ z' = x' + iy' \in \mathbb{C}^* \end{cases}$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $(x',y') \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

0,25

On a : $\varphi(z \times z') = \varphi((x+iy)(x'+iy')) = \varphi(xx' - yy' + i(x'y + xy'))$

$= M(xx' - yy', x'y + xy') =$

$= M(x,y) \times M(x',y')$

$= \varphi(z) \times \varphi(z')$

D'où, φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, \times)$

b) Puisque : $\left\{\begin{array}{l} (\mathbb{C}^*, \times) \text{ est un groupe commutatif} \\ \varphi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ dans } (E, \times) \end{array}\right.$

Alors, il suffit de montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On a $z \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0)$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi(x+iy) = M(x,y) \\ M(x,y) \neq M(0,0) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \varphi(z) \in E^*$

Donc $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

Donc, on a : $(\mathbb{C}^*, \times)$ groupe commutatif

- φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E^*, \times)$
- $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

D'après le théorème d'homomorphisme de groupes on a $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.

0,75

- Puisque $\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ est l'élément neutre dans } (\mathbb{C}^*, \times) \\ \varphi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ dans } (E^*, \times) \end{array}\right.$

Alors $\varphi(1) = \varphi(1 + i \times 0) = M(1,0)$ est l'élément neutre dans E^*.

Donc $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1,0)$.

4) - Puisque E est un sous-groupe du groupe commutatif $(M_3(\mathbb{R}), +)$ alors $(E, +)$ est un groupe commutatif

- $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif
- Montrons que $\times$ distributive par rapport à $+$ dans E

On a : - $\times$ distributive par rapport à $+$ dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$

- $(\forall ((x,y), (x',y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$

$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - yy', xy' + yx') \in E$

D'où E est une partie stable de $M_3(\mathbb{R})$.

Donc, $\times$ distributif par rapport à $+$ dans E

0,5

Conclusion

$(E, +, \times)$ est un corps commutatif

5) Soit $M(x,y) \in E$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$A \times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

امتحان شهادة البكالوريا

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0,5

b) Supposons qu'il existe un élément de E admettant un symétrique dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

on pose : $M(x,y)$ l'élément de E où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$M(x',y')$ le symétrique de $M(x,y)$ dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ ou $(x',y') \in \mathbb{R}^2$

On a : • $M(x,y) \times M(x',y') = I \Rightarrow A \times M(x,y) \times M(x',y') = A \times I = A$

Donc $A \times M(x,y) \times M(x',y') = A$ (1)

• $A \times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \times M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M(x',y')$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $A \times M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2)

0,5

De (1) et (2) on :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $1 = 0$ Contradiction

Donc aucun élément de E n'admet de symétrique dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

ROYAUME DU MAROC

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
ACADEMIE REGIONALE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
REGION DE TANGER-TETOUAN-AL HOCEIMA

Série / Option : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

RESERVE AU SECRETARIAT

COMPOSITION DE : ....

NOTE DEFINITIVE

Sur ....

Appréciations de la note chiffrée

Nom du correcteur et signature : ....

Partie 2

Exercice 2

Première partie $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

On a $173 \mid a^3+b^3 \Rightarrow a^3+b^3 \equiv 0 [173]$

$\Rightarrow a^3 \equiv -b^3 [173]$

$\Rightarrow (a^3)^{57} \equiv (-b^3)^{57} [173]$

$\Rightarrow a^{171} \equiv -b^{171} [173]$ (57 impair)

Donc $a^{171} \equiv -b^{171} [173]$

0,25

2) On a $173 \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0 [173]$

$\Leftrightarrow a^{171} \equiv 0 [173]$

$a^{171} \equiv -b^{171} [173]$

$\Leftrightarrow -b^{171} \equiv 0 [173]$

$\Leftrightarrow 173 \mid b^{171}$

173 premier

$\Leftrightarrow 173 \mid b$

Donc 173 divise a si et seulement si $173 \mid b$.

0,25

3) D'après 2) On a

$173 \mid a \Rightarrow \begin{cases} 173 \mid b \\ 173 \mid a \end{cases}$

$\Rightarrow 173 \mid a+b$

Donc $173 \mid a+b$

0,25

4) 173 premier

~~$a \wedge 173 = 1$ Car 173 ne divise~~

pas

N.B : il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

On a $\begin{cases} 173 \text{ est premier} \\ 173 \wedge a = 1 \text{ car } 173 \text{ ne divise pas } a \end{cases}$

D'après le théorème de Fermat, on a $a^{172} \equiv 1 [173]$

On a $\begin{cases} 173 \text{ est premier} \\ 173 \text{ ne divise pas } a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 173 \text{ premier} \\ 173 \text{ ne divise pas } b \end{cases}$

D'après 2) $173|a \Leftrightarrow 173|b$
Donc
173 ne divise pas a
$\Leftrightarrow$ 173 ne divise pas b

0,5

$\Rightarrow \begin{cases} 173 \text{ premier} \\ 173 \wedge b = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow b^{172} \equiv 1 [173]$ (Fermat)

Donc : $\begin{cases} a^{172} \equiv 1 [173] \\ b^{172} \equiv 1 [173] \end{cases} \Rightarrow a^{172} \equiv b^{172} [173]$

Donc : $a^{172} \equiv b^{172} [173]$

c) On a 173 ne divise pas a $\Rightarrow 173 \wedge a = 1$
$\Rightarrow 173 \wedge a^{171} = 1$

On a, d'après 4(b) : $\begin{cases} 173 | (a+b) a^{171} \\ 173 \wedge a^{171} = 1 \end{cases}$

0,5

D'après le théorème de Gauss on a $173 | a+b$
Donc 173 divise a+b

<u>Deuxième partie</u>

1) On a $x^3+y^3 = 173(~~x+y~~)$
$= (x+y)(x^2-xy+y^2)$

Donc $\begin{cases} 173(x+y) = (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ x+y \neq 0 \text{ car } (x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow x^2-xy+y^2 = 173$

0

On a : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k(x^2+y^2-2xy) + (k-1)xy = 1 \\ x^2+y^2-xy = 173 \end{cases}$

$\Rightarrow k \times (173 - xy) + (k-1)xy = 1$

$k(x-y)^2 + (k-1)xy = k(x^2+y^2-xy-xy) + (k-1)xy =$
$= k(173 - xy) + (k-1)xy$
$= k\,173 - kxy + kxy - xy$
$= k173 - xy$

Arithmétique première partie b)

On a d'après 1) et 4) $a^{171} \equiv -b^{171} [173]$
$a^{172} \equiv b^{172} [173]$

$\Rightarrow \begin{cases} a^{171} b \equiv -b^{172} [173] \\ -b^{172} \equiv -a^{172} [173] \end{cases}$

$\Rightarrow a^{171} b \equiv -a^{172} [173]$

$\Rightarrow a^{171}(b+a) \equiv 0 [173]$

Donc $a^{171}(a+b) \equiv 0 [173]$

0,25

Deuxième partie

1) On a $x^3+y^3 = 173(xy+1) = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

$= 173k(x^2-xy+y^2) \quad (x+y = 173k)$

Donc $173k(x^2-xy+y^2) = 173(xy+1)$
Donc $\boxed{xy+1 = k(x^2-xy+y^2)}$ (*)

0,25

On a $k(x-y)^2 + (k-1)xy = k(x^2+y^2-xy-xy) + (k-1)xy$

$= k(x^2-xy+y^2) - kxy + kxy - xy$

$= xy+1 - xy$ (D'après (*))

$= 1$

Donc $k(x-y)^2+(k-1)xy = 1$

2) On ~~a k~~ $(x+y$

~~donc~~ $k((x-y)$

On a $k(x-y)^2 + kxy = xy+1$

$\Leftrightarrow k(xy+(x-y)^2) = xy+1$

$\Leftrightarrow k(x^2+y^2-xy) = xy+1$

$\Leftrightarrow k(x^2+y^2-xy) = \frac{x^3+y^3}{173}$

$\Leftrightarrow k(x^2+y^2-xy) = \left(\frac{x+y}{173}\right)(x^2+y^2-xy)$

$x^2+y^2-xy \neq 0$ car $(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

0

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
لجهة طنجة - تطوان - الحسيمة

الشعبة /المسلك : ....

امتحان شهادة البكالوريا

النقطة / 20
....

مادة : ....

خاص بكتابة الامتحان
....

اسم و توقيع المصحح (ة) : ....

2) On a $k(x-y)^2 = 1-(k-1)xy$

• Montrons que $x \neq y$ (par l'absurde)

Supposons que $x=y$ on a
$k(x-x)^2 = 1-(k-1)x^2$ donc $(k-1)x^2=1$

Par conséquent $k = \frac{1}{x^2}+1$ $(x \in \mathbb{N}^*)$

• Si $x \geq 2$; $k \notin \mathbb{N}^*$ contradiction avec $k \in \mathbb{N}^*$

• Si $x=1$ on a $\begin{cases} x^3+y^3 = 173(xy+1) \\ x=y=1 \end{cases} \Rightarrow 2 = 173 \times 2$ (Impossible)

Conclusion $x \neq y$

on a $k(x-y)^2 = 1-(k-1)xy$

on a $\begin{cases} k \in \mathbb{N}^* \\ (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k(x-y)^2 = 1-(k-1)xy \\ k \in \mathbb{N}^* ; (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ (x-y)^2 \geq 1 \quad (\text{car } x \neq y) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} k(x-y)^2 = 1-(k-1)xy \\ k(x-y)^2 \geq 1 \quad (\text{car } k \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1-(k-1)xy \geq 1 \\ k \geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (k-1)xy \leq 0 \\ xy > 0 \\ k \geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 0 \leq k-1 \leq 0$

$\Rightarrow k=1$

Donc $\boxed{k=1}$ Voir suite feuille 3

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

ROYAUME DU MAROC

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
ACADEMIE REGIONALE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
REGION DE TANGER-TETOUAN-AL HOCEIMA

Série / Option : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

RESERVE AU SECRETARIAT

COMPOSITION DE : ....

NOTE DEFINITIVE

Sur ....

Appréciations de la note chiffrée

Nom du correcteur et signature : ....

Ex3 :

feuille ③

1) On a $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1 z_2 - z z_2}{z_1 z_2 - z z_1}$

$= \frac{\frac{z(z_1+z_2)}{2} - z z_2}{\frac{z(z_1+z_2)}{2} - z z_1} = \frac{z z_1 + z z_2 - 2 z z_2}{z z_1 + z z_2 - 2 z z_1}$

0,5

$= \frac{z z_1 - z z_2}{z z_2 - z z_1} = - \frac{z z_1 - z z_2}{z z_1 - z z_2} = -1$

b)

On a $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$

Donc $\arg\left(\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1}\right) \equiv 0 \, [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right) + \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv 0 \, [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) [\pi]$

0,25

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_1 - 0}{z_2 - 0}\right) [\pi]$

$\Rightarrow M, M_1, M_2, O$ sont cocycliques

$\Rightarrow M$ appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

2) Supposons que $z_2 = \bar{z}_1$ et montrons que M appartient à l'axe des réels

On a $\bar{z} = \frac{2 \overline{z_1 z_2}}{\overline{z_1 + z_2}} = \frac{2 \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = \frac{2 z_2 \cdot \bar{z}_2}{z_2 + \bar{z}_2}$

N.B : il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

$= \dfrac{2\,|z_2|^2}{2\,Re(z_2)} = \dfrac{|z_2|^2}{Re(z_2)} \in \mathbb{R}$

0,5

Donc : l'imaginaire de z est nulle. Par conséquent $z \in \mathbb{R}$
D'où : M appartient à l'axe des réels.

Conclusion

Si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.

0,5

3) a) On a $z_2 - 0 = e^{i\alpha}(z_1 - 0)$
Donc $z_2 = e^{i\alpha} z_1$

b) On a $z_2 = e^{i\alpha} z_1$ donc $\dfrac{z_2}{z_1} = e^{i\alpha}$

Par la suite $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 1$.

On a $\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = -1 \Rightarrow \left|\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z}\right| \cdot \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 1$

$\Rightarrow \left|\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z}\right| \times 1 = 1$

$\Rightarrow |z_1 - z| = |z_2 - z|$

0,5

$\Rightarrow MM_1 = MM_2$

$\Rightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

Donc : M appartient à la médiatrice de $[M_1M_2]$.

4) ~~Le~~ discriminant de l'équation est

$\cancel{\Delta = (-(e^{i\theta}+1))^2 - 4 \times 6 \times (e^{i\theta}-1)}$

$\cancel{= (e^{i\theta}+1)^2 - 24\,(e^{i\theta}-1)}$

Puisque z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation alors

$$\begin{cases} z_1 z_2 = \dfrac{e^{i\theta}-1}{6} \\ z_1 + z_2 = -\dfrac{(-(e^{i\theta}+1))}{6} = \dfrac{e^{i\theta}+1}{6} \end{cases}$$

D'où, $z = \dfrac{2 z_1 z_2}{z_1 + z_2} = 2 \cdot \dfrac{e^{i\theta}-1}{6} \times \dfrac{\cancel{6}}{e^{i\theta}+1}$

0,5

$= 2 \cdot \dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

b) $z = 2\,\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = 2\,\dfrac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos(\frac{\theta}{2})}$

$= \dfrac{2\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}\, i = 2\tan(\frac{\theta}{2})\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

On a $0<\theta<\pi \Rightarrow 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} > 0$ 0,5

D'où, la forme trigonométrique de z est :

$z = 2\tan(\frac{\theta}{2})\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin(\frac{\pi}{2})\right)$

Suite de l'Arithmétique

On a : $k=1$ donc

$(E) \Leftrightarrow 1\times(x-y)^2+0=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1 \\ x+y = 173\times 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=173 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=173 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=174 \\ 2y=172 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x=172 \\ 2y=174 \end{cases}$ 0,25

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=87 \\ y=86 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=86 \\ y=87 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \{(87,86);(86,87)\}$

Donc, l'ensemble de solutions de (E) est :

$S = \{(87,86);(86,87)\}$

ROYAUME DU MAROC

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
ACADEMIE REGIONALE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION
REGION DE TANGER-TETOUAN-AL HOCEIMA

Série / Option : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

RESERVE AU SECRETARIAT

....

COMPOSITION DE : ....

Appréciations de la note chiffrée

NOTE DEFINITIVE

Sur ....

Nom du correcteur et signature : ....

Ex 4 — feuille (4)

Première partie : Soit $x > 0$.

$t \mapsto e^{-t}$ continue sur $[0, x]$

$t \mapsto e^{-t}$ dérivable sur $]0, x[$

D'après le théorème d'accroissements finis, on a

0,5 $(\exists \theta \in]0, x[)\quad (e^{-\theta})' = \dfrac{e^{-x} - 1}{x - 0}$

Donc $(\exists \theta \in]0, x[)\quad -e^{-\theta} = \dfrac{e^{-x} - 1}{x}$

Par conséquent $(\exists \theta \in]0, x[)\quad e^{-\theta} = \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$

D'où $(\exists \theta \in]0, x[)\quad e^{\theta} = \dfrac{x}{1 - e^{-x}}$

2) a) Soit $x > 0$; on a $(\exists \theta \in]0, x[)\quad e^{\theta} = \dfrac{x}{1 - e^{-x}}$

$\theta > 0 \Rightarrow e^{\theta} > 1$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{1 - e^{-x}} > 1 \\ -x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{1 - e^{-x}} > 1 \\ e^{-x} < 1 \end{cases}$

0,25 $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{1 - e^{-x}} > 1 \\ 1 - e^{-x} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x > 1 - e^{-x}$

$\Rightarrow e^{-x} > 1 - x$

Donc $(\forall x > 0)\quad 1 - x < e^{-x}$

b) Soit $x > 0$; on a $(\exists \theta \in]0, x[)\quad e^{\theta} = \dfrac{x}{1 - e^{-x}}$

$\theta \in]0, x[\Rightarrow 0 < \theta < x$

$\Rightarrow e^{\theta} < e^{x}$

N.B : il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

$\Rightarrow \begin{cases} e^{\theta} < e^{x} \\ \frac{x}{1-e^{-x}} = e^{\theta} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{x}{1-e^{-x}} < e^{x}$ || $0 < x \Leftrightarrow -x < 0$ $\Rightarrow e^{-x} < 1$ $\Rightarrow 1 - e^{-x} > 0$

$\Rightarrow x < e^{x}(1-e^{-x})$

$\Rightarrow x < e^{x} - 1$

$\Rightarrow e^{x} > x+1$

0,25

Donc $(\forall x > 0)$ $e^{x} > x+1$

c) On a $(\forall x>0)$ $(\exists \theta \in]0,x[)$ $e^{\theta} = \frac{x}{1-e^{-x}}$

$\begin{cases} 0 < \theta < x \\ e^{\theta} = \frac{x}{1-e^{-x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \theta < x \\ e^{\theta} = \frac{xe^{x}}{e^{x}(1-e^{-x})} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \theta < x \\ \ln e^{\theta} = \theta = \ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right) \end{cases}$

0,25

$\Rightarrow 0 < \ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right) < x$

D'où $(\forall x>0)$ $0 < \ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right) < x$

Deuxième partie

1) a) Soit $x>0$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{x}-1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^{x} = e^{0} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{e^{x}-1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^{x} = 1 \end{cases}$

0,5

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{xe^{x}}{e^{x}-1} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$

D'où f continue à droite de 0

b) Soit $x>0$, on a :

$f(x) - x = \frac{xe^{x} - xe^{x} + x}{e^{x}-1} = \frac{x}{e^{x}-1} = \frac{1}{\frac{e^{x}}{x} - \frac{1}{x}}$

Puisque $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^{x}}{x} - \frac{1}{x}} = 0$

0,5

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$

Interprétation graphique : la droite $y = x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de +∞.

2.a) On a D'après 2)a) (Partie I) :
$(\forall x>0)\ e^{-x}>1-x$

~~$e^{-x}>1-x \Rightarrow (\forall x>0) \int_0^x e^{-t}dt > \int_0^x ...$~~

Soit $x>0$ et Soit $t\in]0,x[$.
On a $t>0 \Rightarrow e^{-t}>1-t$
$$\Rightarrow \int_0^x e^{-t}dt \geq \int_0^x (1-t)dt$$
$$\Rightarrow \left[-e^{-t}\right]_0^x \geq \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$
$$\Rightarrow -e^{-x}+1 \geq x-\frac{x^2}{2}$$
Donc $(\forall x\geq 0)\ -e^{-x}+1 \geq x-\frac{x^2}{2}$.

0,25

b) On a $(\forall x\geq 0)$ $\begin{cases} x-\frac{x^2}{2} \leq -e^{-x}+1 \\ e^{-x} > 1-x \end{cases}$
$$\Rightarrow (\forall x>0) \begin{cases} -e^{-x}+1 \geq x-\frac{x^2}{2} \\ -e^{-x}+1 < x \end{cases}$$
$$\Rightarrow (\forall x>0)\quad x-\frac{x^2}{2} \leq 1-e^{-x} \leq x$$

Soit $x>0$ et soit $t\in]0,x[$ on a $t>0$ donc :

0,5

$$t-\frac{t^2}{2} \leq 1-e^{-t} \leq t$$
$$\Rightarrow \int_0^x t-\frac{t^2}{2} \leq \int_0^x 1-e^{-t} \leq \int_0^x t$$
$$\Rightarrow \left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right]_0^x \leq \left[t+e^{-t}\right]_0^x \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \leq e^{-x}-1+x-0 \leq \frac{x^2}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \leq e^{-x}+x-1 \leq \frac{x^2}{2}$$
Donc : $(\forall x>0)\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \leq e^{-x}+x-1 \leq \frac{x^2}{2}$

Pour $x=0$, on a $0-0 \leq 1-1 \leq 0$ vrai

Conclusion $(\forall x\geq 0)\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \leq e^{-x}+x-1 \leq \frac{x^2}{2}$

3)a) $(\forall x>0)$ $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\frac{xe^x}{e^x-1}-1}{x} = \frac{\frac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}}{x}$
$$= \frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)} = \frac{e^x}{x(e^x-1)}(x-1+e^{-x})$$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة طنجة تطوان الحسيمة

الشعبة/المسلك : ....

امتحان شهادة البكالوريا

النقطة / 20

خاص بكتابة الامتحان .

مادة : ....

اسم و توقيع المصحح (ة) : ....

$= \dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2} \times \dfrac{xe^x}{e^x-1} = \dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2} \times f(x)$

Donc $(\forall x>0)$ $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2} f(x)$

0,5

b) On a $(\forall x>0)$ $\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{6} \leq \dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2} \leq \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{6} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2} f(x) = \dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

0,75

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{2}$

D'où f dérivable à droite de 0

- Le coefficient directeur de la demi-tangente à (C) à droite de 0 est $\dfrac{1}{2}$

4(a) $x \mapsto x$; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto e^x - 1$ sont dérivable sur $]0,+\infty[$

- $(\forall x>0)$ $e^x - 1 \neq 0$

Donc, f dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit et quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et on a $(\forall x>0)$

$f'(x) = \dfrac{(e^x+xe^x)(e^x-1) - xe^x(e^x)}{(e^x-1)^2}$

0,75

$= \dfrac{e^{2x}-e^x+xe^{2x}-xe^x-xe^{2x}}{(e^x-1)^2} = \dfrac{e^{2x}-e^x-xe^x}{(e^x-1)^2}$

$= \dfrac{e^x(e^x-x-1)}{(e^x-1)^2}$

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

ROYAUME DU MAROC

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
ACADEMIE REGIONALE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION
REGION DE TANGER-TETOUAN-AL HOCEIMA

Série / Option : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

RESERVE AU SECRETARIAT

COMPOSITION DE : ....

NOTE DEFINITIVE

Sur ....

Appréciations de la note chiffrée

Nom du correcteur et signature : ....

feuille 5

b) On a $(\forall x>0)$ $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}>0$

Donc le signe de f' est celui de e^x-x-1 sur $]0,+\infty[$

Puisque d'après 2) b) partie (1) :

$(\forall x>0)$ $e^x-x-1>0$

Alors $(\forall x>0)$ $f'(x)>0$

0,5

Donc $\|$ • f strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$\|$ • f continue à droite de 0.

Par conséquent f strictement croissante sur $[0,+\infty[$

3ème partie a) Montrons par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $U_n>0$

Initialisation Pour $n=0$, $U_0>0$

Donc la propriété est vérifiée pour le premier terme

Hérédité Pour un certain $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $U_n>0$ et on montre que $U_{n+1}>0$

On a $U_n>0$ $\Rightarrow f(U_n)>f(0)$

0,5

f strictement croissante sur $]0,+\infty[$ $\Rightarrow f(U_n)>1$

$\{x\mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]1,+\infty[$

$\Rightarrow \ln(f(U_n))>\ln(1)$

$\Rightarrow U_{n+1}>0$

Conclusion $(\forall n\in\mathbb{N})$ $U_n>0$

b) On a $(\forall n\in\mathbb{N})$ $U_n>0$

$\|(\forall x>0)$ $0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$

Donc $(\forall n\in\mathbb{N})$ $0<\ln\left(\frac{U_ne^{U_n}}{e^{U_n}-1}\right)<U_n$ ~~...~~

$\Rightarrow (\forall n\in\mathbb{N})$ $0<\ln(f(U_n))<U_n$

$\Rightarrow (\forall n\in\mathbb{N})$ $0<U_{n+1}<U_n$

$\Rightarrow (\forall n\in\mathbb{N})$ $U_n>U_{n+1}$

N.B : il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

Donc, la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante

0,5

On a $\begin{cases} (U_n)_{n\geq 0} \text{ décroissante} \\ (U_n)_{n\geq 0} \text{ minorée par } 0 \end{cases} \Rightarrow (U_n)_{n\geq 0}$ convergente

c) Soit $n\geq 0$: $x>0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(0) \\ f(0)=1 \end{cases}$ (f strictement croissante sur $]0,+\infty[$)

$\Rightarrow \ln(f(x)) > \ln 1$

$\Rightarrow \ln($

0

Ex 5 :

1) a) On a $\begin{cases} x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^t-1}} \text{ continue sur }]0,+\infty[\\ (\forall x>0)\ \dfrac{1}{\sqrt{e^t-1}} > 0 \end{cases}$

Donc $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^t-1}}$ admet une primitive T sur $]0,+\infty[$ strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Donc $(\forall x>0)$ $F(x) = T(x) - T(\ln 2)$

D'où le signe de F sur $]0,+\infty[$:

$x > \ln 2 \Rightarrow T(x) > T(\ln 2)$
$\Rightarrow F(x) > 0$

$0 < x < \ln 2 \Rightarrow T(x) < T(\ln 2)$
$\Rightarrow F(x) < 0$

$x = \ln 2 \Rightarrow F(x) = T(\ln 2) - T(\ln 2) = 0$

0,5

Donc : le signe de F est :

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$F(x)$		$-$	0	$+$	

b) • $x \overset{u}{\mapsto} x$ dérivable sur $]0,+\infty[$

• $u(]0,+\infty[) \subset]0,+\infty[$

• $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ continue sur $]0,+\infty[$

0,5

D'après le théorème, F dérivable sur $]0,+\infty[= I$ et on a

$(\forall x>0)$ $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$

c) On a $(\forall x>0)$ $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}} > 0$

0,25

D'où, F est strictement croissante sur $]0,+\infty[= I$

2) a)

N.B : il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

On pose : $u = \sqrt{e^t - 1}$

On a $t = \ln 2 \Rightarrow u = \sqrt{2-1} = 1$

$t = x \Rightarrow u = \sqrt{e^x - 1}$

On a $u = \sqrt{e^t - 1} \Rightarrow u^2 = e^t - 1$

$\Rightarrow e^t = u^2 + 1$

$\Rightarrow t = \ln(u^2+1)$

Donc $dt = \frac{2u}{u^2+1} du$

D'où $\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = \int_1^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{u} \times \frac{2u}{u^2+1} du$

$= \int_1^{\sqrt{e^x-1}} \frac{2}{u^2+1} du$

$= \left[2 \operatorname{Arctan} u \right]_1^{\sqrt{e^x-1}}$

$= 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{e^x - 1} - 2 \operatorname{Arctan} 1$

$= 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{e^x - 1} - 2 \times \frac{\pi}{4}$

$= 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$

Donc $(\forall x \in I)$ $\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} dt = 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$

4) On a $(\forall x \in I)$ $F(x) = 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$

On a $\lim_{x \to 0^+} e^x = 1^+$ donc $\lim_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0^+$

~~On a $\lim_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0^+$; $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}$ continue à droite de 0 $\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} 2\operatorname{Arctan}\sqrt{}$~~

On a $\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0 \\ x \mapsto \sqrt{x} \text{ continue à droite de } 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \sqrt{e^x - 1} = \sqrt{0} = 0^+$

On a $\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \sqrt{e^x - 1} = 0^+ \\ x \mapsto 2 \operatorname{Arctan} x \text{ continue à droite de } 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} 2\operatorname{Arctan}\sqrt{e^x-1} = 2\operatorname{Arctan} 0 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

D'où $\lim_{x \to 0^+} F(x) = -\frac{\pi}{2}$

0,5

0,25

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
لجهة طنجة - تطوان الحسيمة

الشعبة /المسلك : ....

امتحان شهادة البكالوريا

خاص بكتابة الامتحان
....

مادة : ....

النقطة / 20
....

اسم و توقيع المصحح (ة) : ....

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{e^x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \operatorname{Arctan} X = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 2\operatorname{Arctan}\sqrt{e^x-1} = \frac{\pi}{2}\times 2 = \pi.$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 2\operatorname{Arctan}\sqrt{e^x-1} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$

0,25

3) a) . F continue sur I car elle est dérivable sur I
. F strictement croissante sur I

D'après le théorème, F bijective de I dans

$F(I) = F(]0,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to0^+} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

0,25

b) Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et soit $y \in I$

$F^{-1}(x) = y \Leftrightarrow F(y) = x$

$\Leftrightarrow 2\operatorname{Arctan}\sqrt{e^y-1} - \frac{\pi}{2} = x$

$\Leftrightarrow 2\operatorname{Arctan}\sqrt{e^y-1} = x + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < x + \frac{\pi}{2} < \pi$

$\Rightarrow 0 < \frac{x+\frac{\pi}{2}}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\sqrt{e^y-1} = \frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}.$

$\Leftrightarrow \tan \operatorname{Arctan}\sqrt{e^y-1} = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

0,5

$\Leftrightarrow \sqrt{e^y-1} = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow e^y - 1 = \tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow e^y = \tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + 1$

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

ROYAUME DU MAROC

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
ACADEMIE REGIONALE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
REGION DE TANGER-TETOUAN-AL HOCEIMA

Série / Option : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

RESERVE AU SECRETARIAT

COMPOSITION DE : ....

Appréciations de la note chiffrée

NOTE DEFINITIVE

Sur ....

Nom du correcteur et signature : ....

feuille 6

$\Leftrightarrow \quad y = \ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)$

Donc $f^{-1} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to I$

$x \mapsto \ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)$

Suite de l'Analyse 3ème partie

c) On pose : $(\forall x>0)\ T(x) = \ln(xf(x)) - x$

T dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $(\forall x>0)$

$T'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} - 1$

$= \dfrac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2} \times \dfrac{e^x-1}{xe^x} - 1$

$= \dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)} - 1$

$= \dfrac{e^x-x-1-xe^x+x}{x(e^x-1)}$

$= \dfrac{e^x-xe^x-1}{x(e^x-1)}$

On pose $(\forall x>0)\ A(x) = e^x - xe^x - 1$

On a $(\forall x>0)\ A'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x < 0$

Donc A est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

Puisque A continue à droite de 0 alors A est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ Donc :

$(\forall x>0) \quad x>0 \Rightarrow A(x) > A(0)$

N.B : il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

$\Rightarrow e^x > xe^x + 1$

D'où $(\forall x > 0)$ $A(x) > 0$

Par la suite : $(\forall x > 0)$ $T'(x) > 0$
T est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$
Puisque T continue

Suite de l'analyse : partie 3 :

c) Soit $x > 0$
D'après partie 1) b) on a $(\forall x > 0)$ $e^x > x + 1$

$$e^x > x + 1 \Rightarrow e^x - 1 > x$$
$$\Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 1$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{x}{e^x - 1} < 1$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{xe^x}{e^x - 1} < e^x$$
$$\Rightarrow f(x) < e^x$$
$$\Rightarrow \ln(f(x)) < \ln e^x$$
$$\Rightarrow \ln(f(x)) < x$$

0,5

Donc $(\forall x > 0)$ $\ln(f(x)) < x$
D'où, l'équation $\ln(f(x)) = x$ n'admet pas de solution sur $]0,+\infty[$
Puisque $\ln(f(0)) = \ln(1) = 0$

Alors 0 est la seule solution de l'équation $\ln(f(x)) = x$.

On a : $x \mapsto \ln(f(x))$ continue sur $[0,+\infty[$ comme composée de deux fonctions continues sur $[0,+\infty[$
- $V([0,+\infty[) \subset [0,+\infty[$ car

$(\forall x \geq 0)$ $x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq f(0) \\ f(0) = 1 \end{cases}$
$\Rightarrow \ln(f(x)) \geq 0$

0,25

et $u_0 \in [0,+\infty[$
- u_n convergente

Posons l sa limite.
D'après le théorème on a $\ln(f(l)) = l$

~~Puisque cette équation n'admet qu'une seule solution~~

On a $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \end{cases} \Rightarrow l \geq 0$

Puisque l'équation $\ln(f(x)) = x$ n'admet qu'une seule solution qui est 0 sur $[0, +\infty[$ alors,

$$\boxed{l = 0}$$