

Note définitive sur 20

20,00

20

Série : .....

**EXAMEN DU BACCALAUREAT**

COMPOSITION DE :  
Appréciation expliquant la note chiffrée :

RESERVE A L'ACADEMIE

144739

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : .....

Exercice ① (Géométrie dans l'espace)

$A(1, -1, 1)$   $B(0, -2, 1)$   $C(1, -2, 0)$

1) a

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  ✓

0,75

b. on a  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} (1, 1, 1)$  est un vecteur normal du plan (ABC)

donc une eq cartésienne du plan (ABC) s'écrit :

(ABC)  $x + y + z + d = 0$

↳ déterminons d :

$A \in (ABC) \Leftrightarrow x_A + y_A + z_A + d = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 1 - 1 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = 1$

0,5

donc : (ABC) :  $x + y + z + 1 = 0$  est une eq cartésienne du plan (ABC)

2)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 2^2 + (y+1)^2 - 1^2 + (z-1)^2 - 1^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5$

donc (S) est une sphère de centre  $\Omega(2, -1, 1)$  et de rayon

$R = \sqrt{5}$  ✓

0,75

3) a.  $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|x_\Omega + y_\Omega + z_\Omega + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}$

$= \frac{|2 - 1 + 1 + 1|}{\sqrt{3}}$  ✓

0,5

$$d(\alpha, (ABC)) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \checkmark$$

2) on a  $d(\alpha, (ABC)) = \sqrt{3}$  et  $R = \sqrt{3}$ .

0,5

puisque  $d(\alpha, (ABC)) < R$

donc  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle  $(\Gamma)$

Exercice 2 (Complexes)

1)  $z^2 - 2z + 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4 - 16$$

$$= -12 = (2\sqrt{3}i)^2$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \bar{z}_1$$

$$= \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1 - i\sqrt{3}$$

$$= -1 + i\sqrt{3}$$

0,75

donc:  $S' = \{1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$  ✓

2)  $a = 1 - i\sqrt{3}$   $b = 2 + 2i$   $c = \sqrt{3} + i$   $d = -2 + 2\sqrt{3}$

a - vérifions que  $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$

$$a - d = 1 - i\sqrt{3} - 2 = -2\sqrt{3}$$

$$a - d = 3 - 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

d'autre part:

$$-\sqrt{3}(c - d) = -\sqrt{3}(\sqrt{3} + i + 2 - 2\sqrt{3})$$

$$= -3 - \sqrt{3}i - 2\sqrt{3} + 6$$

$$-\sqrt{3}(c - d) = 3 - 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

0,5

donc  $|a - d = -\sqrt{3}(c - d)|$  ✓

b - on a  $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$

donc  $\frac{a - d}{c - d} = -\sqrt{3} \in \mathbb{R}^*$

0,25

d'où  $A, D$  et  $C$  sont 3 pt alignés ✓

3)  $R(M) = M'$  et  $R(\theta, -\frac{\pi}{3})$

on a  $z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta}) z_0$   $z_0$  = l'écriture complexe de la

rotation ✓

ou  $R(\theta, -\frac{\pi}{3})$  et  $R(M) = M'$

$$\text{donc } z' = e^{\frac{i\pi}{3}} z + (1 - e^{\frac{i\pi}{3}}) \times 0$$

$$\Rightarrow z' = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) z$$

$$\Rightarrow z' = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i z$$

$$\Rightarrow z' = \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) z$$

$$\Rightarrow z' = \frac{1}{2} a z \quad \checkmark$$

4) on a  $R(B) = H$  et  $p = a - c$   
 vérifier que  $h = ip$ , calculons d'abord  $p = a - c$

$$a - c = 1 - i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i$$

$$= 1 - i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i$$

$$p = 1 - \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1) i$$

or, on a  $R(B) = H$

$$\text{donc } h = \frac{1}{2} ab$$

$$= \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) \cdot (2 + 2i)$$

$$= \frac{1}{2} ((2 + 2i\sqrt{3}) + i(2 - 2\sqrt{3}))$$

$$\text{d'aut } h = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$$

$$\text{d'autre part, } ip = i(1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} - i)$$

$$ip = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$$

par conséquent  $h = ip \quad \checkmark$

$$b. \text{ on a } h = ip \Leftrightarrow \frac{h}{p} = i$$

$$\text{on a } \left| \frac{h}{p} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |h| = |p|$$

$$\Leftrightarrow \text{OH} = \text{OP} \quad \textcircled{1} \quad \checkmark$$

D'autre part, on a  $\arg\left(\frac{h}{p}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  (car  $i \in \text{EuR}$  et  $i^2 = -1$ )

$$\text{or } \arg\left(\frac{h}{p}\right) \equiv (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH})$$

$$\text{donc } (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \textcircled{2}$$

De  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$ , on déduit que  $OPH$  est un triangle isocèle rectangle en  $O$ .  $\checkmark$

0,5

0,5

0,5



NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : .....

Problème :

Partie ① :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \quad \text{Df} = ]0, +\infty[$$

$$1) \lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \quad (\text{unité} = 1 \text{ cm})$$

$$= +\infty$$

car :

on sait que

$$\lim_{0^+} \ln x = -\infty$$

donc  $\lim_{0^+} -\ln x = +\infty$  et  $\lim_{0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

et on a  $\lim_{0^+} x = 0$

donc :

(f) admet une asymptote verticale d'éq  $x=0$  (l'axe des ordonnées) ✓

0,5

$$2) a) \text{ on a } f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \quad (\forall x \in ]0, +\infty[)$$

$$= x + \frac{1}{2} + \ln x \left( \frac{1}{2} \ln x - 1 \right)$$

0,25

donc  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x \quad (\forall x \in ]0, +\infty[)$

$$b) \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x$$

$$= +\infty$$

car :

$$\left( \lim_{+\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{+\infty} x = +\infty \right)$$

0,5

$$c) \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = 4 \frac{(\ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

donc :

calculons :

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \quad \forall x \in ]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

on pose  $X = \sqrt{x}$

donc si  $x \rightarrow +\infty$  alors  $X \rightarrow +\infty$

0,5

$$\begin{aligned} \text{d'où: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left( \frac{\ln X}{X} \right)^2 \\ &= 0 \quad \checkmark \quad (\text{car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0) \quad \checkmark \end{aligned}$$

d - on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

(d'après question 2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + \ln x \left( \frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \\ &= +\infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

donc: puisqu'on a

0,75

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty \quad \checkmark$$

alors: (f) admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite (A) d'éq.  $y = x$  au voisinage de  $+\infty$ .  $\checkmark$

3) a - on a  $\forall x \in ]0, 1]$

$$0 < x < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x-1 < 0 \quad \text{donc } x-1 < 0 \quad \forall x \in ]0, 1] \quad \textcircled{1}$$

$$\text{et on sait que } \ln x < 0 \quad \forall x \in ]0, 1] \quad \textcircled{2}$$

$$\text{donc } (x-1) + \ln x < 0 \quad \forall x \in ]0, 1] \quad \checkmark$$

d'autre part, on a  $\forall x \in [1, +\infty[$  (d'après les résultats  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$ )

$$x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \quad \text{donc } x-1 \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[ \quad \textcircled{1'}$$

$$\text{et on sait que } \ln x \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[ \quad \textcircled{2'}$$

donc  $(x-1) + \ln x \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[ \quad \checkmark$

(d'après les résultats (1') et (2'))

b-  $f'(x) = (x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2)' \quad (\forall x \in ]0, +\infty[)$

$$= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \quad \checkmark$$

$$f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x} \quad (\forall x \in ]0, +\infty[) \quad \checkmark$$

c- on a  $x > 0 \quad (\forall x \in ]0, +\infty[)$

donc  $f'(x)$  a le signe de  $x-1+\ln x$

et d'après la question (3) a-), on a conclu que

$(x-1) + \ln x < 0 \quad \forall x \in ]0, 1[$  et  $(x-1) + \ln x > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$

donc  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in ]0, 1[$

et  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[ \quad \checkmark$

d'où  $f$  est décroissante sur  $]0, 1[$

et  $f$  est croissante sur  $[1, +\infty[ \quad \checkmark$

d'où le tableau de variation de  $f$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

$\xrightarrow{+\infty}$   $\xrightarrow{3/2}$   $\xrightarrow{+\infty}$

0,5

4) a-  $f''(x) = \left(\frac{x-1+\ln x}{x}\right)' \quad (\forall x \in ]0, +\infty[) \quad (f'(1) = 0) \quad \checkmark$

$$= \frac{(x-1+\ln x)' \cdot x - (x-1+\ln x) \cdot x'}{x^2}$$

$$= \frac{(1 + \frac{1}{x})x - x + 1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2} \quad (\forall x \in ]0, +\infty[) \quad \checkmark$$

0,5

امتحان شهادة البكالوريا

النقطة النهائية	على 20
.....	.....
.....	بالحروف
.....	.....

التقدير المفسر للنقطة

b- on a  $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$  ( $\forall x \in ]0, +\infty[$ )

on a  $x^2 > 0$  ( $\forall x \in ]0, +\infty[$ )

donc  $f''(x)$  a le signe de  $2 - \ln x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0$        $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x > 0$


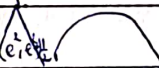
$\Leftrightarrow \ln x = 2$        $\Leftrightarrow -\ln x < -2$

$\Leftrightarrow x = e^2$        $\Leftrightarrow \ln x < 2$

$\Leftrightarrow x < e^2$

d'où le tableau de concavité de  $(f)$

0,5

x	0	$e^2$	$+\infty$
$f''(x)$		+	-
Concavité			

donc  $(f)$  admet un pt. d'inflexion de coordonnées  $(e^2, \frac{e^2-1}{2})$

c) a-  $f(x) - x = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - x$

$= \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2$

$= \frac{1}{2} (1 - 2\ln x + (\ln x)^2)$

$f(x) - x = \frac{1}{2} (\ln x - 1)^2 \quad \forall x \in ]0, +\infty[$  ✓

0,5

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = e$

et on a  $(\ln x - 1)^2 > 0 \quad \forall x \in ]0, +\infty[$

donc  $(f)$  se situe au dessus de  $(A)$  sur  $]0, +\infty[$

et  $(f)$  et  $(A)$  se rencontrent au pt. d'abscisse  $x = e$

Note définitive  
sur 20

.....

Série : .....

**EXAMEN DU BACCALAUREAT**

COMPOSITION DE :  
Appréciation expliquant la note chiffrée :  
.....

RESERVE A L'ACADEMIE

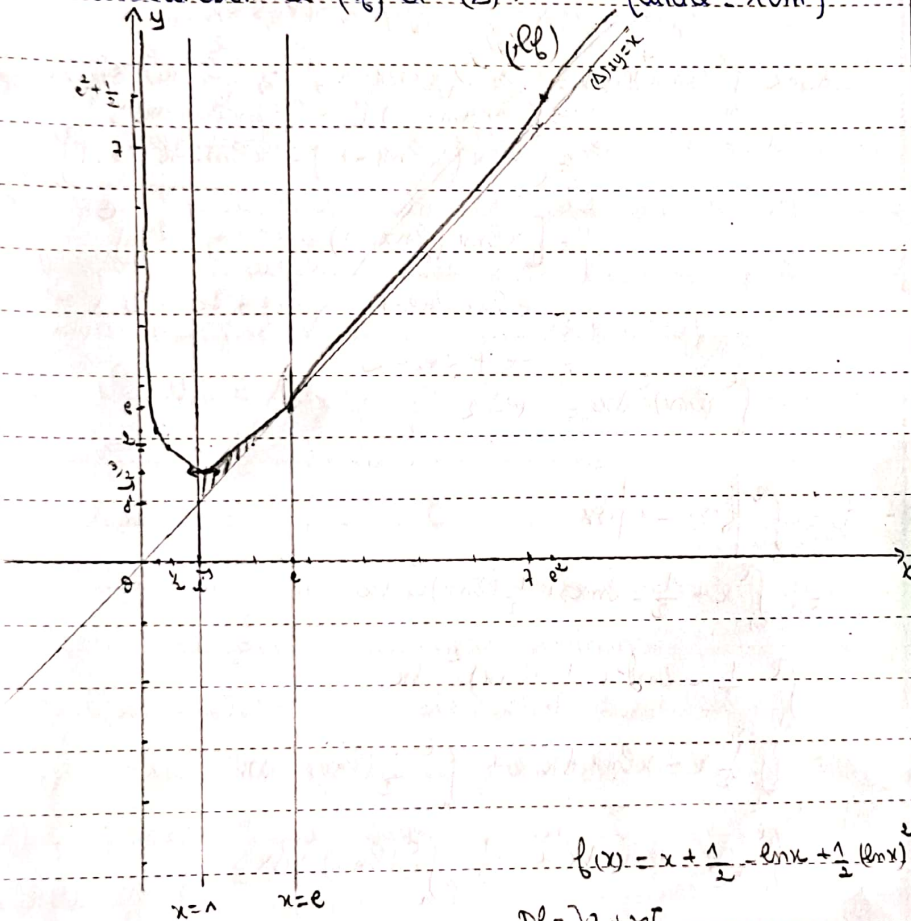
.....

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : .....

Position relative de  $(f)$  et  $(\Delta)$

$x$	0	e	$+\infty$
$f(x) - x$		+	-
Position	$(f)$ au dessus de $(\Delta)$	$(f)$ au dessus de $(\Delta)$ (seulement)	$(f)$ au dessous de $(\Delta)$

b - Construction de  $(f)$  et  $(\Delta)$  (unité = 1cm)



$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

$$D_f = ]0, +\infty[$$

Tableau de valeurs :

$x$	1	$\frac{e}{2} \approx 2,4$	e	$\frac{1}{2}$	0,3
$f(x)$	$\frac{3}{2} \approx 1,5$	$\frac{e^2 - 1}{2} \approx 2,9$	e	1,9	2,2

b) a.  $H(x) = (x \ln x - x)'$   $\forall x \in ]0, +\infty[$

$= x' \ln x + x(\ln x)' - 1$

$= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$

$= \ln x + 1 - 1$

$= \ln x$

$= h(x)$

De plus,  $x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$   
 et  $x \mapsto \ln x$  dérivable sur  $\mathbb{R}^+$   
 donc  $x \ln x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$   
 par conséquent,  $H$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$

0,5

donc  $H(x) = x \ln x - x$  est une primitive de  $h(x) = \ln x$

b. De plus, on a  $x$

$\int_1^e (\ln x)^2 dx$

on pose  $f(x) = \ln x$   $f'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = x \ln x - x$

donc  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[ \ln x (x \ln x - x) \right]_1^e = \left[ \ln x (x \ln x - x) - \int_1^e \ln x (x \ln x - x) dx \right]_1^e$

$= \left[ \ln x (x \ln x - x) - (x \ln x - x - x) \right]_1^e$

$= \left[ x \ln x (\ln x - 1) - x \ln x + 2x \right]_1^e$

$= e \ln e (\ln e - 1) - e \ln e + 2e - 2$  ( $\ln 1 = 0$ )

$= -e + 2e - 2 = e - 2$

0,75

c.  $A = \int_1^e \left| f(x) - x \right| dx$

$= \int_1^e \left( x - \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right) dx$

$= \int_1^e \left( \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right) dx$

$= \int_1^e \frac{1}{2} dx - \int_1^e \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{2} (\ln x)^2 dx$

$= \int_1^e \frac{1}{2} dx - \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{2} \int_1^e (\ln x)^2 dx$

$= \left[ \frac{1}{2} x - x \ln x + x \right]_1^e + \frac{1}{2} (e - 2)$

$= \frac{e}{2} - e + e - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} (e - 2)$

$= \frac{e}{2} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - 1 + 1$

$A = e - \frac{5}{2}$

0,5

Partie ② :

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) a - Mg. 1,  $(U_n) \leq e \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

on pose  $n=0$

$$1 \leq U_0 = 1 \leq e$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$

on suppose  $1 \leq U_n \leq e$

on démontre  $1 \leq U_{n+1} \leq e$

on a  $f$  est croissante sur  $[1, e]$  et on a  $1 \leq U_n \leq e$

$$\text{donc } f(1) \leq f(U_n) \leq f(e)$$

$$\text{d'où } 1 \leq \frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq e$$

par conséquent  $1 \leq U_n \leq e \quad (\forall n \in \mathbb{N})$  ✓

b - Mg.  $(U_n)$  est croissante c-à-d Mg.  $U_{n+1} \geq U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

D'après la question (Partie ①) r. a)

$$\text{on a } f(x) - x \geq 0 \quad \forall x \in [1, e]$$

$$\text{or } U_n \in [1, e]$$

$$\text{donc } f(U_n) - U_n \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\text{d'où } U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\text{alors } U_{n+1} \geq U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \checkmark$$

par conséquent,  $(U_n)$  est croissante. ✓

c -  $(U_n)$  est croissante et majorée par  $e$

donc  $(U_n)$  est convergente. ✓

$$2) f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)$$

Continuité

on a  $x \mapsto x + \frac{1}{2}$  est continue sur  $[1, e]$  (restriction d'une fct polynôme)

et  $x \mapsto \ln x$  est continue sur  $]0, +\infty[$

donc cont sur  $[1, e]$

donc  $x \mapsto \frac{1}{2} (\ln x)^2$  est aussi continue sur  $[1, e]$

0,5

0,5

0,5

الشعبة : .....

## امتحان شهادة البكالوريا

خاص بالأكاديمية

النقطة النهائية	على 20
.....	.....
.....	.....
.....	بالحروف

مادة : .....

التقدير المفسر للنقطة

اسم المصحح وتوقيعه (ها) : .....

دعنا :  $f$  استمرة على  $[1, e]$  ( somme de fonctions continues )

D'autre part,

$$f([1, e]) = [f(1), f(e)] \quad (\text{car } f \text{ est croissante sur } [1, e])$$
$$= \left[\frac{3}{2}, e\right]$$

donc  $f([1, e]) \subset [1, e]$

\* Déterminons limite de  $U_n$  en considérant  $I = [1, e]$

on a  $f(U_n) = U_{n+1}$  ①

et  $f$  est continue sur  $I$  ②

et  $f(I) \subset I$  ③

et  $U_0 \in I$  ④

et  $(U_n)$  est convergente ⑤

Donc de ①, ②, ③, ④ et ⑤, on déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

est la solution de l'équation  $f(x) = x$  (avec  $x \in I$ )

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\ln x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

donc :  $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = e}$

0,75