امتحانات البكالوريا

خاص بكتابة الامتحان

61339

النقطة النهائية

على ....20/20....

المادة : ....الرياضيات....

الشعبة أو المسلك : .... المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح : ....

التوقيع : ....

Exercice ①

① a- on a $A(1,-1,-1)$ et $B(0,-2,1)$

donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

on a $C(1,-2,0)$

donc $\vec{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

d'où $\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix}-1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-1 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-1 & 0\\-1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$

$\boxed{\vec{AB}\wedge\vec{AC} = +\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}$

b- on a $(\vec{AB}\wedge\vec{AC})(1,1,1)$ est un vecteur normal à (ABC)

et $A(1,-1,-1) \in (ABC)$

donc $M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)+(y+1)+(z+1) = 0$

$\Leftrightarrow x+y+z+1 = 0$

donc $(ABC): x+y+z+1=0$

② - on a $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2-2z+1 = 5$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = \sqrt{5}^2$

donc $\Omega(2,-1,1)$ est le centre de (S) et $R=\sqrt{5}$ est son rayon

③ a- $d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|2\times1+1\times(-1)+1\times1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

b- $d=\sqrt{3}$ et $R=\sqrt{5}$

or $d<R$ donc (ABC) coupe (S) selon un cercle (Γ)

خاص بكتابة الامتحان		
المـادة :		النقطة النهائية
الشعبة أو المسلك : ....المستوى :....................		على ....
التقدير المفسر للنقطة :.................................		
اسم المصحح :..............................التوقيع:................................		

Exercice 2 :

(1) on a l'equation $z^2 - 2z + 4 = 0$

or $\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-2)^2 - 4\times4\times1$
$= -12 < 0$

donc l'equation admet deux solution imaginaire sur $\mathbb{C}$

donc : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2}$
$= 1 - \frac{i\sqrt{12}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$

0,5

et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + i\sqrt{3}$

(2) a- $a - d = 1 - i\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3}$
$= 3 - i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
$= -\sqrt{3}(-\sqrt{3} + i + 2)$

et $c - d = \sqrt{3} + i + 2 - 2\sqrt{3}$
$= -\sqrt{3} + 2 + i$

0,1

donc $a - d = -\sqrt{3}(-\sqrt{3} + i + 2)$
$= -\sqrt{3}(c - d)$

b- on a $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$
$\Rightarrow \frac{a-d}{c-d} = -\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

0,25

donc A, C et D sont alignés

③ on a $R(M) = M' \Leftrightarrow (z' - z_0) = (z - z_0)e^{-i\frac{\pi}{3}}$

or $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow z' = z\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow z' = z\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}z(1 - i\sqrt{3})$$

$$z' = \frac{1}{2}az$$

④ a- on a $R(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}az$

donc $R(B) = H \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}ab$

$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(2 + 2i)$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 2i - i2\sqrt{3} + 2\sqrt{3})$$

$$h = 1 + i - i\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$h = i(-i + 1 - \sqrt{3} - i\sqrt{3})$$

$$h = i(1 - i\sqrt{3} - (\sqrt{3} + i))$$

$$h = i(a - c)$$

$h = ip$ avec $p = a - c$

b- on a $h = ip$

$\Rightarrow \frac{h}{p} = i$

$\Rightarrow \frac{h - z_0}{p - z_0} = i$

or $\left|\frac{h - z_0}{p - z_0}\right| = |i| = 1 \Rightarrow |h - z_0| = |p - z_0|$

donc $OH = OP$ donc le triangle OHP est isocèle en O

et on a $\left|\frac{h - z_0}{p - z_0}\right| = |i| = 1$

donc $\frac{h - z_0}{p - z_0} = 1(0 + i) = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

donc $\text{Arg}\left(\frac{h-z_0}{p-z_0}\right) \equiv (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc le triangle OHP est rectangle en O

d'où finallement le triangle OHP st rectangle et isocéle en O

Exercice 3 -

① * on a A "obtenir trois boule verte"
donc $\text{card}\, A = C_3^3 = 1$

donc $p(A) = \frac{\text{card}\, A}{\text{card}\, \Omega} = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$

* et on a B "obtenir trois boule de même couleur"
$\Rightarrow$ obtenir 3 boule verte ou 3 boule rouge

donc $P(B) = \frac{\text{card}\, B}{\text{card}\, \Omega} = \frac{C_3^3 + C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{21}{120}$

$= \frac{7}{40}$

② on a C "obtenir deux boules de même couleur ou 3 boule de même couleur"
donc obtenir deux boules rouge et une non-rouge ou deux boule verte et une non-verte ou 3 boule rouge ou 3 boule verte
donc $P(C) = \frac{\text{card}\, C}{\text{card}\, \Omega} = \frac{C_6^2 \times C_4^1 + C_3^2 \times C_7^1 + C_3^3 + C_6^3}{C_{10}^3}$

$P(C) = \frac{102}{120} = \frac{17}{20}$

امتحانات البكالوريا

خاص بكتابة الامتحان

النقطة النهائية

على ....

المـادة : ....

الشعبة أو المسلك : ....المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح : ....التوقيع: ....

Problème.

Première partie

① $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$= +\infty$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}(\ln(x))^2 = +\infty$

donc C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

1,1

② a- $f(x) = x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$= x+\frac{1}{2}+\ln x\left(-1+\frac{1}{2}\ln x\right)$

donc $(\forall x\in]0,+\infty[)\ f(x) = x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$

0,5

b- donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$

$= +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

0,5

يمنع على المترشح أن يمضي ورقته، أو يضع أية علامة يمكنها أن تبين مصدرها

امتحانات البكالوريا

خاص بكتابة الامتحان

النقطة النهائية

على ....

المـادة : ....

الشعبة أو المسلك : ....المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح : ....التوقيع: ....

c) pour $x \in]0, +\infty[$

on a $\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(2\ln x^{\frac{1}{2}})^2}{\sqrt{x}^2}$

$= 4\frac{(\ln\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}^2}$

$= 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

on a $x \to +\infty \Rightarrow \sqrt{x} \to +\infty$

donc $\lim\limits_{\sqrt{x}\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$

car $\lim\limits_{\sqrt{x}\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

d) or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}$

$= 1$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 1\times x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2} + \left(-1 + \frac{1}{2}\ln x\right)\ln x = +\infty$

0,5

car $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\ln(x) = +\infty$

donc Cf admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite (D) d'equation $y = x$

3 a-

* pour tout $x \in]0,1]$

on a $x \leq 1$

donc $x - 1 \leq 0$ et $\ln(x) \leq \ln 1$

$x - 1 \leq 0$ et $\ln(x) \leq 0$

donc $(x-1) + \ln(x) \leq 0$

donc $(\forall x \in]0,1])$; $(x-1) + \ln(x) \leq 0$

* et pour tout $x \in [1;+\infty[$

on a $x \geq 1$

et $x - 1 \geq 0$ et $\ln(x) \geq \ln(1)$

donc $x - 1 \geq 0$ et $\ln(x) \geq 0$

d'où $(x-1) + \ln(x) \geq 0$

donc $(\forall x \in [1;+\infty[)$; $(x-1) + \ln(x) \geq 0$

b- on a $f(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

donc $f'(x) = \left(x + \frac{1}{2} - \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right)'$

$= 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{2}\ln(x) \times \frac{1}{x}$

$= 1 + \frac{1}{x}(\ln(x) - 1)$

$= 1 + \frac{\ln(x) - 1}{x} = \frac{x + \ln x - 1}{x}$

$f'(x) = \frac{(x-1) + \ln x}{x}$

c) on a $x>0$ et $(x-1)+\ln x \leq 0$ sur $]0;1]$
et $(x-1)+\ln(x) \geq 0$ sur $[1;+\infty[$

donc :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	|| $-$	0	$+$
$f(x)$	|| $+\infty$ ↘	$\frac{3}{2}$	↗ $+\infty$

④ a- on a f' dérivable sur $]0;+\infty[$

donc $f''(x) = (f')' = \left(\frac{x-1+\ln(x)}{x}\right)'$

$$= \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{(\ln(x))'x - (x)'\ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{x}{x} - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1+1-\ln(x)}{x^2}$$

donc $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f''(x) = \frac{2-\ln(x)}{x^2}$

b or $\frac{2-\ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2-\ln(x) = 0$
$\Leftrightarrow 2 = \ln(x)$
$\Leftrightarrow x = e^2$

donc $f''(e^2) = 0$ et change de signe de $]0;e^2]$ à $[e^2;+\infty[$
d'où C_f admet un point d'inflection d'abscisse e^2

or $f(e^2) = e^2 + \frac{1}{2} - \ln e^2 + \frac{1}{2}(\ln e^2)^2$
$= e^2 + \frac{1}{2} - 2 + \frac{4}{2}$
$= e^2 + \frac{1}{2} = \frac{2e^2+1}{2}$ donc $H\left(e^2; \frac{2e^2+1}{2}\right)$ est un point d'inflexion de C_f

خاص بكتابة الامتحان

امتحانات البكالوريا

النقطة النهائية

على ....

المادة : ....

الشعبة أو المسلك :.................. المستوى :..................

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح :.............................. التوقيع:..............................

Probleme:

Première partie

5 - a on a $f(x) - x = x + \frac{1}{2} - \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - x$

$$= \frac{1}{2} - \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 2\ln(x) + (\ln x)^2\right)$$

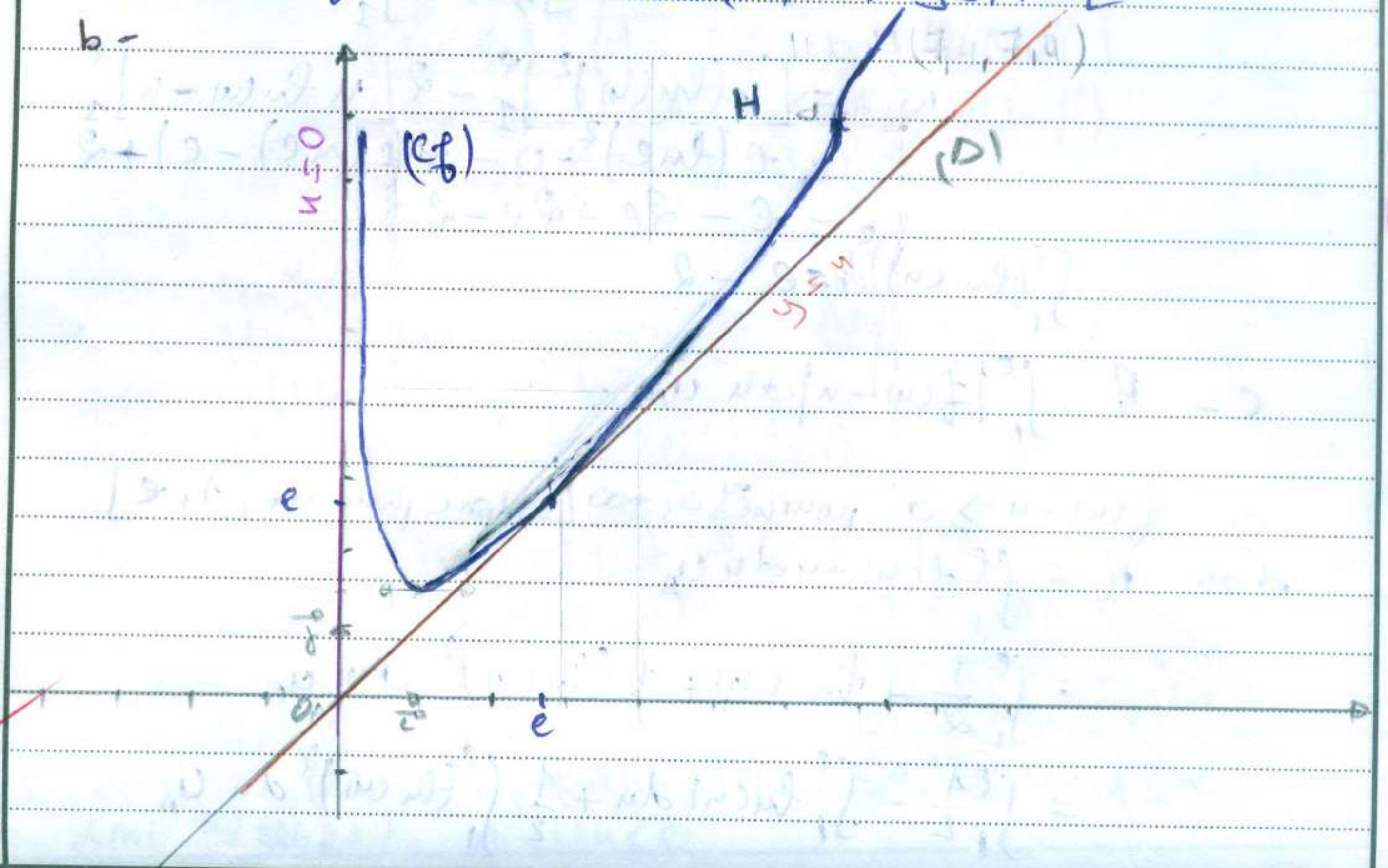
$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x) - 1\right)^2$$

or $(\ln x - 1)^2 \geq 0$ donc $f(x) - x \geq 0$

donc $f(x) \geq x$

d'où C_f est au dessus de (Δ) sur $]0; +\infty[$

b -



خاص بكتابة الامتحان

امتحانات البكالوريا

النقطة النهائية

على ....

المـادة : ....

الشعبة أو المسلك : .... المستوى : ....

التقدير المفسر للنقطة : ....

اسم المصحح : ....التوقيع: ....

6) a- or $(H(x))' = (x\ln(x) - x)'$

$= (x)'\ln(x) + x(\ln(x))' - (x)'$

$= \ln(x) + \frac{x}{x} - 1$

$= \ln(x)$

or $h: x \mapsto \ln(x)$

donc H est une primitive de la fonction h sur $]0;+\infty[$

0,5

b- on prend pour $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

$\begin{cases} u = (\ln(x))^2 \\ v' = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} u' = \frac{2}{x}\ln(x) \\ v = x \end{cases}$

donc $\int_1^e (\ln x)^2 d(x) = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{x}\, x\ln(x)dx$

$= \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - 2\int_1^e \ln(x)dx$

$= \left[x(\ln(x))^2\right]_1^e - 2\left[x\ln(x) - x\right]_1^e$

$= e(\ln e)^2 - 0 - 2(e(\ln e) - e) - 2$

$= e - 2e + 2e - 2$

0,2

$\int_1^e (\ln(x))^2 dx = e - 2$

c- $A = \int_1^e |f(x) - x| dx\ u_A$

or $f(x) - x \geq 0$ pour $x \in]0,+\infty[$ donc pour $x \in [1, e]$

d'où $A = \int_1^e f(x) - x\, dx\ u_A$

$= \int_1^e \frac{1}{2} - \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2 dx\ u_A$

$= \int_1^e \frac{1}{2} - \int_1^e \ln(x)dx + \frac{1}{2}\int_1^e (\ln(x))^2 dx\ u_A$

$A = \left[\frac{x}{2}\right]_1^e - \left[x\ln(x) - x\right]_1^e + \frac{1}{2}(e-2)$ ua

$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2}(e\ln e - e) - 1 + \frac{e}{2} - 1$ ua

$= \frac{e}{2} - e + e - 1 - 1 + \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$ ua

$= e - \frac{5}{2}$ ua

$= \frac{2e-5}{2} \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

$A = \frac{2e-5}{2}$ cm²

Deuxième Partie

(1) a- on a $u_0 = 1$

donc $1 \leq u_0 \leq e$

on pose que $1 \leq u_n \leq e$

et on montre que $1 \leq u_{n+1} \leq e$

* $u_{n+1} \geq 1$

or $u_{n+1} - 1 = u_n + \frac{1}{2} - \ln(u_n) + \frac{1}{2}(\ln(u_n))^2 - 1$

$= (u_n - 1) + \left(\frac{1}{2} - \ln(u_n) + \frac{1}{2}(\ln(u_n))^2\right)$

$= (u_n - 1) + \frac{1}{2}\left(1 - 2\ln(u_n) + (\ln(u_n))^2\right)$

$= (u_n - 1) + \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 1)^2$

on a $u_n \geq 1$

donc $u_n - 1 \geq 0$ et on a $\frac{1}{2}(\ln(u_n) - 1)^2 \geq 0$

donc $(u_n - 1) + \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 1)^2 \geq 0$

d'où $u_{n+1} - 1 \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$

* $u_{n+1} \leq e$

on a $u_{n+1} - e = (u_n - e) + \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 1)^2$

on a $u_n \leq e \Rightarrow u_n - e \leq 0$ et $1 \leq u_n \leq e \Rightarrow 0 \leq \ln(u_n) \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq \ln(u_n) - 1 \leq 0$

$0 \leq \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 1)^2 \leq \frac{1}{2}$

donc $(u_n - e) + \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 1)^2 \leq \frac{1}{2} \leq e \Rightarrow u_{n+1} \leq e$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq u_n \leq e$

b- $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$

on sait que $f(u) - u \geq 0$ (Premiere Partie)
donc $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \geq 0$
$U_{n+1} \geq U_n$
donc (U_n) est croissante

c- on a $U_n \leq e$ donc (U_n) est majoré par e
et (U_n) ~~est~~ strictement croissante
donc elle est convergente.

2) - or $U_0 \in [1; e]$
- et f est continue sur $[1; e]$
- et on a $f[1;e] = [\frac{3}{2}; \frac{2e+1}{2}] \subset [1;e]$
- et (U_n) est convergente
- et $U_{n+1} = f(U_n)$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ est une solution de l'equation $f(u) = u$

or $f(u) = u \iff u + \frac{1}{2} - \ln u + \frac{1}{2}(\ln u)^2 = u$

$\iff \frac{1}{2} - \ln u + \frac{1}{2}(\ln u)^2 = 0$

$\iff 1 - 2\ln u + (\ln u)^2 = 0$
$\iff (\ln(u) - 1)^2 = 0$
$\iff \ln(u) - 1 = 0$
$\iff \ln(u) = 1$
$\iff u = e$

donc $\lim\limits_{+\infty} U_n = e$