ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ACADÉMIE RÉGIONALE D'ÉDUCATION ET DE FORMATION RÉGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

570

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : Maths

Note définitive sur 20
20,00

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT
333278

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : Sissi

Exercice 2

1/a Partie stable :

On notera $M(x,y)$ les éléments de E tel que $M(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ tel que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$

$I = M(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ car $0 \in \mathbb{R}$ et $1 \in \mathbb{R}^*$

donc $E \neq \emptyset$

$E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $(M(x,y), M(a,b)) \in E^2$

on a :

$$M(x,y) \times M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a+xb \\ 0 & yb \end{pmatrix}$$

$$= M(a+xb, yb) \in E$$

En effet

$\forall (a,x) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (y,b) \in \mathbb{R}^{*2}$

$y \times b \neq 0$

et $a+xb \in \mathbb{R}$

donc E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

0,5

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

b/ Non commutativité.

Prenons :

$M(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ ca $(1,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

et $M(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in E$ ca $(1,2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

on a $M(1,1) \times M(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

et $M(1,2) \times M(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

On suppose que

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 3 \\ 2 = 2 \end{cases}$ absurde

donc $\exists (M, M') \in E$

$M \times M' \neq M' \times M$

avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

donc $\times$ n'est pas commutative dans E

c/ Soit $x \in \mathbb{R}$ et Soit $y \in \mathbb{R}^*$

on a,

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} + \frac{x}{y} \\ 0 & \frac{y}{y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x - \frac{\cancel{y}x}{\cancel{y}} \\ 0 & \frac{y}{y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

doc $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,8

2/ Groupe non commutatif.

Associativité et ~~élément neutre~~

- $\times$ est associative dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
- et I est l'élément neutre dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

donc

- $\times$ est associative dans $(E, \times)$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(0,1) \in E$ car $(0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

- donc I est l'élément neutre dans $(E, \times)$

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين

الشعبة أو المسلك : .... المستوى ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

مـادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

Éléments symétrisable

on a $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^*)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

avec : $\frac{-x}{y} \in \mathbb{R}$ (car $(x,y) \in \mathbb{R}\mathbb{R}^*$)

et $\frac{1}{y} \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^*$ (car $y \in \mathbb{R}^*$)

donc $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \in E$

c à d $(\forall M(x,y) \in E)$

$(\exists M(\frac{-x}{y}, \frac{1}{y}) \in E)$

$$M((x,y)) \times M(\frac{-x}{y}, \frac{1}{y}) = M(\frac{-x}{y}, \frac{1}{y}) \times M(x,y) = I$$

donc tout élément de E est symétrisable

donc $(E,\times)$ est un groupe.

D'apè 1/b. $\times$ n'est pas commutative dans E

donc $(E,\times)$ est un groupe non commutatif

0,5

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Note définitive sur 20

Matière : ....

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

(Suite Exercice 2)

3/a- Homomorphisme.

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$

on a :

$\varphi(x) \times \varphi(y) = M(x) \times M(y)$

$= \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & y-1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & y-1+y(x-1) \\ 0 & xy \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & y(1+(x-1))-1 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & yx-1 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$

et d'autre part

$\varphi(x \times y) = M(x \times y)$.

$= \begin{pmatrix} 1 & xy-1 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & yx-1 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$

donc $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$

0,5

$\varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E, \times)$

et puisque $F \subset E$, donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E, \times)$

b/ Montrons que F est un groupe commutatif

~~$(E, \times)$ est un groupe~~

~~$F \subset E$~~

~~Montrons que~~

φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(F, \times)$

<u>Surjection :</u>

Soit $M(x) \in F$

on résout l'équation à inconnue y :

$$\varphi(y) = M(x) \iff M(y) = M(x)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & y-1 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\iff y = x \in \mathbb{R}^*$$

0,5

donc $(\forall M \in F)(\exists! x \in \mathbb{R}^*)\quad \varphi(x) = M$

donc φ est un homomorphisme bijectif (isomorphisme) de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(F, \times)$ c-à-d $\varphi(\mathbb{R}^*) = F$

on sait que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif

donc :

$(\varphi(\mathbb{R}^*), \times)$ est un groupe commutatif

c-à-d $(F, \times)$ est un groupe commutatif

Élément neutre :

Soit $M(x) \in F$

On résoud l'équation :

$M(x) \times M(y) = M(x) \Leftrightarrow \varphi(x) \times \varphi(y) = \varphi(x)$

$\Leftrightarrow \varphi(x.y) = \varphi(x)$ [car φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(F, \times)$]

$\Leftrightarrow M(xy) = M(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & xy-1 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow xy = x$

$\Leftrightarrow y = 1$ car $x \neq 0$

$\Leftrightarrow M(y) = M(1)$

or $1 \in \mathbb{R}^*$

donc $M(1) \in F$

et $(\forall M(x) \in F)$

$M(x) \times M(1) = M(1) \times M(x) = M(x)$

[car $\times$ est commutative dans F puisque F est un groupe commutatif]

donc $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

est l'élément neutre dans $(F, \times)$

0,

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

Exercice 3

Première partie

1/ m est solution de (E)

donc $m^3 - 2m \times m^2 + 2m^2 \times m - m^3 = 0$

Résolvons l'équation :

(E) : $z^3 - 2mz^2 + 2m^2 z - m^3 = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - 2mz^2 + 2m^2 z - \cancel{m^3} = m^3 - 2m^3 + 2m^3 - \cancel{m^3}$

$\Leftrightarrow z^3 - m^3 - 2m(z^2 - m^2) + 2m^2(z - m) = 0$

$\Leftrightarrow (z-m)(z^2 + zm + m^2) - 2m(z-m)(z+m) + 2m^2(z-m) = 0$

$\Leftrightarrow (z-m)(z^2 + zm + m^2 - 2m(z+m) + 2m^2) = 0$

$\Leftrightarrow (z-m)(z^2 - zm + m^2) = 0$

$\Leftrightarrow (z-m) \times (P(z)) = 0$

Trouvons les racines de P

(P) : $z^2 - zm + m^2 = 0$

$\Delta = m^2 - 4m^2 = -3m^2 = (\sqrt{3}im)^2$

or $m \neq 0$ donc $\Delta \neq 0$

P(z) = 0 admet deux solutions distinctes :

$z_1 = \frac{m + \sqrt{3}im}{2} = m\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$z_2 = \frac{m - \sqrt{3}im}{2} = m\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

donc l'ensemble de solutions de (E) est

$S = \left\{ m , m\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) , m\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \right\}$ 01

2/a z_1 et z_2 sont solutions de (E)

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1 z_2}=\frac{m\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+m\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{m\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)*m\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}m}{m^2\times e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$=\frac{m}{m^2\times e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)}}=\frac{m}{m^2\times e^{i0}}$$

$$=\frac{m}{m^2\times 1}$$

0,25

$$\boxed{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{m}}$$

b- $m=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$z_1=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\right)$$

$$=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

0,25

$$\boxed{z_1=\sqrt{3}\,i}$$

$Z_2 = m\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \times e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$= e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \times e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$= e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} \left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$\boxed{Z_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

0,25

Deuxième partie

1/ on a $\frac{b-0}{a-0} = \frac{me^{-i\frac{\pi}{3}}}{me^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{-i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

0,25

$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$

donc les points A, B et O ne sont pas alignés

2/a_ P(p) est le centre de la rotation qui transforme O en A

on note cette rotation r_p

$A = r_p(O) \iff (a - p) = e^{i\frac{\pi}{2}}(0 - p)$

et $\iff me^{i\frac{\pi}{3}} - p = -e^{i\frac{\pi}{2}}(p)$

$\iff p\left(-1 + e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = -me^{i\frac{\pi}{3}}$

$\iff p\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right) = -me^{i\frac{\pi}{3}}$

$\iff p\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\left(2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = -me^{i\frac{\pi}{3}}$

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

امتحان نيل شهادة البكالوريا

الشعبة أو المسلك : .... المستوى ....

مادة : ....

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

$A = r(O) \Leftrightarrow z_P \times 2i \frac{\sqrt{2}}{2} = -m e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_P = \frac{1}{\sqrt{2}} m \times e^{i\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} \times e^{i\pi}$

$\Leftrightarrow z_P = m \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{i\left(\frac{(-12-6+8)\pi}{24} + \pi\right)}$

$\Leftrightarrow z_P = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{14}{24}\pi}$

$\Leftrightarrow \boxed{z_P = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}}$

0,5

$R(z_R)$ est le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ transformant B en O
on note cette rotation r'

$O = r'(B) \Leftrightarrow -z_R = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - z_R)$

$\Leftrightarrow z_R(-1 + e^{i\frac{\pi}{2}}) = e^{i\frac{\pi}{2}} \times m e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_R(-1 + e^{i\frac{\pi}{2}}) = m e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}$

$\Leftrightarrow z_R \times e^{i\frac{\pi}{4}}(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = m e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\Leftrightarrow z_R \times 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \times m e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\Leftrightarrow z_R \times e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\left(-i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{6}\right)} \times m$

$\Leftrightarrow z_R = \frac{\sqrt{2}}{2} m \times e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow z_R = \frac{\sqrt{2}}{2} m e^{i\left(\frac{8-12-24}{48}\pi\right)}$

$\Leftrightarrow z_R = \frac{\sqrt{2}}{2} m e^{-i\frac{7\pi}{12}} \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{\sqrt{2}}{2} m e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$

0,5

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

Suite complexe

b/ $Q(q)$ st le centre de la rotation qu'on notera r''

$B = r''(A) \Leftrightarrow (me^{-i\frac{\pi}{3}} - q) = e^{i\frac{\pi}{2}}(me^{i\frac{\pi}{3}} - q)$

$\Leftrightarrow q(-1 + e^{i\frac{\pi}{2}}) = -me^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}} \times me^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow q\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right) = -me^{-i\frac{\pi}{3}} + me^{i\frac{5\pi}{6}}$

$\Leftrightarrow q\ 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = me^{-i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{5\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$

$\Leftrightarrow q \times \cancel{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = me^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\frac{3\pi}{12}}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}} - e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right)\right)$

$\Leftrightarrow q = \frac{1}{\sqrt{2}} \times me^{-i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$\Leftrightarrow q = \frac{\sqrt{2}}{2} m e^{-i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} \times 2i\sin\frac{7\pi}{12}$

$\Leftrightarrow q = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} m \times (-i) \times i \times \cancel{2}\sin\frac{7\pi}{12}$

$\Leftrightarrow \boxed{q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ 0,5

(car $-i \times i = 1$)

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

$3/\ OQ = |q - z_0| = |\overrightarrow{z_0 q}|$

$= \left| m\sqrt{2}\, \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right|$

$= \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \times \sqrt{2} \times |m|$

car $0 < \frac{7\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin \frac{7\pi}{12} > 0$

$\Rightarrow \left|\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right| = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

or $PR = |p - r|$

$= \left| m\frac{\sqrt{2}}{2} \left(e^{i\frac{7\pi}{12}} - e^{-i\frac{7\pi}{12}} \right) \right|$

$= |m| \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left| 2 i \sin \frac{7\pi}{12} \right|$

$= |m| \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times |2| \times \left|\sin \frac{7\pi}{12}\right| \times |i|$

$= \sin \frac{7\pi}{12} \times \sqrt{2} \times |m|$

donc $\boxed{OQ = PR}$

De plus on a : $\frac{p - r}{q - 0} = \dfrac{m\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}} - m\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{7\pi}{12}}}{m\sqrt{2}\, \sin \frac{7\pi}{12}}$

$= \dfrac{m\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}} - e^{-i\frac{7\pi}{12}} \right)}{m\sqrt{2}\ \sin \frac{7\pi}{12}}$

$= \dfrac{\sqrt{2} \times i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{\sqrt{2}\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

$= i$

c-à-d $\left(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{RP}\right) \equiv \arg\left(\frac{p - r}{q - 0}\right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice 4

Première partie

1/ on pose $\forall t>0 \quad \varphi(t) = \ln(t)$

φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

Soit $x>0$

φ est continue sur $[x, x+1]$

φ est dérivable sur $]x, x+1[$

D'après le théorème des accroissements finis

$\exists c \in]x, x+1[$

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x+1-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{1} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

or on a :

$$0 < x < c < x+1 \Rightarrow \quad \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

donc $\forall x>0$

$$\boxed{\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}}$$

2/a- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-0}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

0,5

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : .... المستوى ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مـادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
....	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

on a d'après (P)

$\forall x > 0$

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} < x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{x^2}{x}$$

0,1

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} < x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < x$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

c-à-d f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE D'ÉDUCATION ET DE FORMATION RÉGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20
....

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

(Suite Ex 4)

2/b- on a $\forall x>0$

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x+1} < x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{x^3}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x+1} < f(x) < x^2$$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

D'après le théorème d'ordre et limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

De plus :

$\forall x>0$

$$\frac{x^2}{x+1} < \frac{f(x)}{x} < x^2$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

D'après le théorème d'ordre et limite

8/

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

I.G : (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

3/a $x \longrightarrow x^3$ st dérivable sur $]0,+\infty[$ comme restriction de fonction polynomiale

$f_1 : x \longrightarrow 1+\frac{1}{x}$ st dérivable sur $]0,+\infty[$ comme restriction de fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

et $\forall x>0 \quad 1+\frac{1}{x} > 1 > 0$

c-à-d $\quad f_1(]0,+\infty[) \subset]0,+\infty[$

or $f_2 : x \longrightarrow \ln(x)$ st dérivable sur $]0,+\infty[$

donc $f_2 \circ f_1 : x \longrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ st dérivable sur $]0,+\infty[$

0,25

alors f st dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivable

et $\forall x>0 \quad f'(x) = (x^3)' \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3 \times \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'$

$$= 3x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3 \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= 3x^2 \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{3} \times \frac{-\frac{1}{x}}{1+x}\right)$$

$$= 3x^2 \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{-1}{3(1+x)}\right)$$

0,5

b Soit $x>0$ on a: $3x^2>0$

et $\frac{1}{3} < 1$ et $\frac{1}{1+x} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(1+x)} < \frac{1}{1+x}$$

or $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (d'après (P))

donc $\frac{1}{3(1+x)} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

c-à-d $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} > 0$

alors $\forall x>0 \quad f'(x)>0$

donc :

f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

De plus :

f est dérivable à droite en 0

donc f est continue à droite en 0

0,5

c/c : f est strictement croissante sur $I=[0,+\infty[$

c/ Tableau de variations.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\,0$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

4/a. Soit $x>0$

$$g'(x) = \frac{f'(x)\times x - f(x)\times (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(3x^3\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)}\right) - x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= 3x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x} - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2x}{2(1+x)}$$

$$= 2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)}\right)$$

0,6

3/a $x \longrightarrow x^3$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme restriction de fonction polynomiale

$f_1 : x \longrightarrow 1+\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme restriction de fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

et $\forall x > 0 \quad 1+\frac{1}{x} > 1 > 0$

c-à-d $\quad f_1(]0,+\infty[) \subset]0,+\infty[$

or $f_2 : x \longrightarrow \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

donc $f_2 \circ f_1 : x \longrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

0,25

alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivable

et $\forall x > 0 \quad f'(x) = (x^3)' \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3 \times \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'$

$$= 3x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3 \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

0,5

$$= 3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{3} \times \frac{-\frac{1}{x}}{1+x}\right)$$

$$= 3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{-1}{3(1+x)}\right)$$

b Soit $x > 0$ on a : $3x^2 > 0$

et $\frac{1}{3} < 1$ et $\frac{1}{1+x} > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3(1+x)} < \frac{1}{1+x}$

or $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (d'après (P))

donc $\frac{1}{3(1+x)} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

on sait que $\forall x>0$

$2x>0$

et $\frac{1}{2(1+x)} < \frac{1}{1+x}$ car $\frac{1}{2}<1$

et $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

donc $\frac{1}{2(1+x)} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

c-à-d $\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)\times 2x > 0$

0,2 donc $\forall x>0 \quad g'(x)>0$

alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

b/ g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

donc g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

De plus, g est strict croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

alors g est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers J

avec $J = \left]\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[=]0,+\infty[$

Justification : $\forall x>0 \quad \frac{x^2}{1+x} < \frac{f(x)}{x} < x$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{1+x} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} x = 0$

D'après le théorème des gendarmes $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE
D'EDUCATION ET DE FORMATION
REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

(Suite Ex 4)

Suite 4/b

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

donc $(\forall y \in]0,+\infty[)(\exists! x \in]0,+\infty[)\quad g(x) = y$

or $1 \in]0,+\infty[$

donc $\exists!\ \alpha \in]0,+\infty[\quad g(\alpha) = 1$

0,2

et on a :

$g(1) = \frac{f(1)}{1} = \ln(2) \simeq 0{,}7 < 1$

$g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{8 \ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2} = 4\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) \simeq 1{,}5 > 1$

donc $g(1) < g(\alpha) < g(2)$

g est bijective et strict croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

donc sa réciproque g^{-1} et strict croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

et on a : $g^{-1}(g(1)) < g^{-1}(g(\alpha)) < g^{-1}(g(2))$

0,2

$\Rightarrow 1 < \alpha < 2$

donc $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ une solution unique α et $\alpha \in]1,2[$

c- on sait que $f(0) = 0$

et $\frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow f(x) = x$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ notée α

c-à-d $\forall x \in D_f = \mathbb{R}^+ \quad f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \alpha$

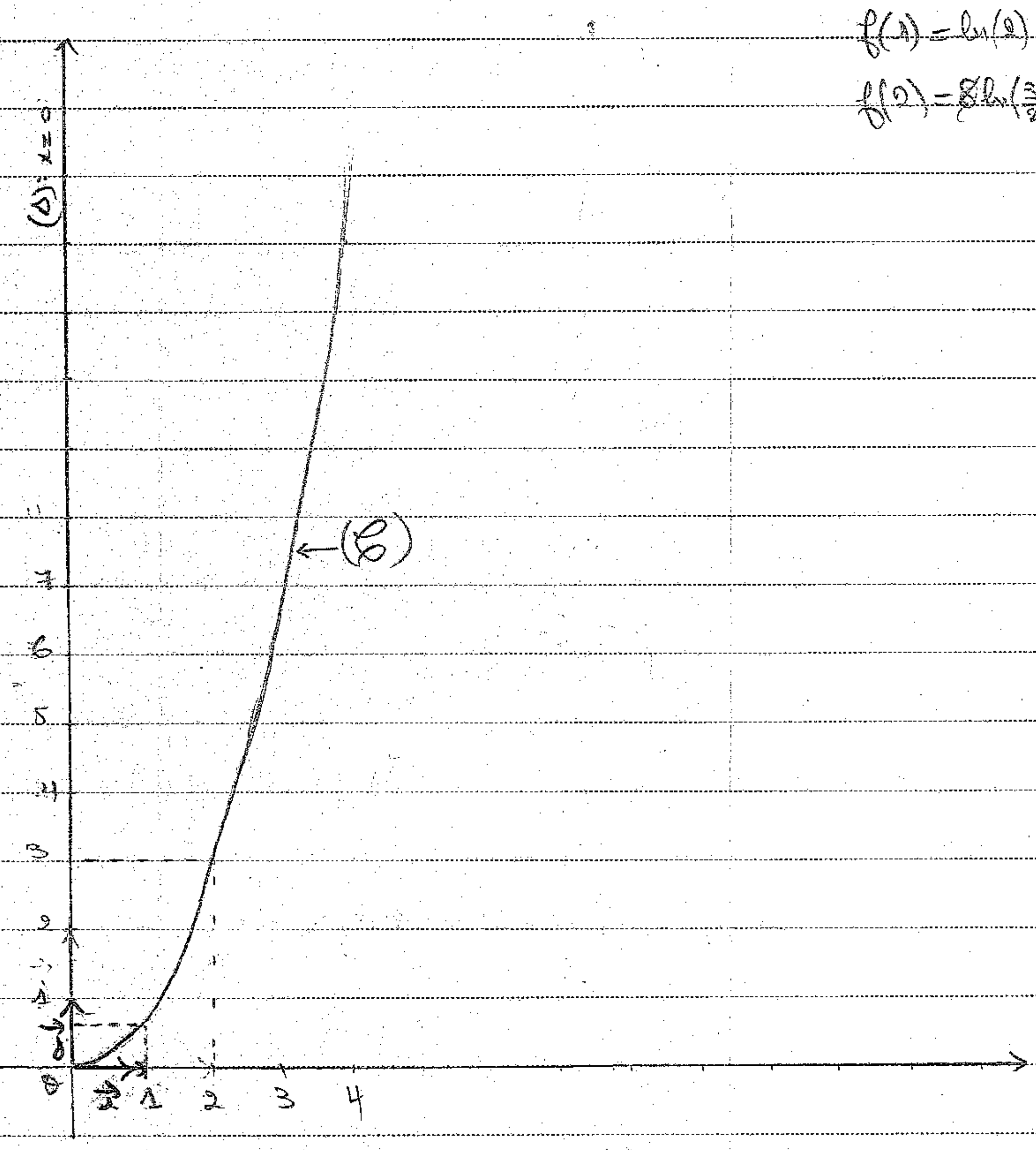
0,5

donc 0 et α sont les seules solutions de $f(x) = x$

5/1- Courbe

$f(1) = \ln(2) \simeq 0{,}7$

$f(2) = 8\ln\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 1{,}5 \times 2 \simeq 3$



0,1

- $f'_d(0) = 0$
  c-à-d $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi tangente horizontale à droite au point $O(0,0)$

- L'axe des ordonnés d'équation $(\Delta): x=0$ est une branche parabolique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

5/b. f est dérivable sur $I = [0,+\infty[$

donc f est continue sur I

et f est strict croissante sur I

donc f est bijective de I vers $f(I) = I$

car $f(I) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [0,+\infty[= I$

0,25

c-à-d f admet une bijection réciproque f^{-1} de I vers I

Deuxième partie

1/ Initialisation :

Pour $n=0$ $\quad 0 < U_0 < \alpha$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

. On suppose que $0 < U_n < \alpha$ et on montre que

$0 < U_{n+1} < \alpha$

on sait que

f est une bijection de I vers I

donc f^{-1} est une bijection de I ~~vers~~ I

on a :

$U_n \in]0,\alpha[\Rightarrow f^{-1}(U_n) \in f^{-1}(]0,\alpha[)$

or f^{-1} est strict croissante sur I car f est strict croissante sur I.

et $f^{-1}(\alpha) = f^{-1}(f(\alpha))$ et $f^{-1}(0) = f^{-1}(f(0)) = 0$

car $f(\alpha) = 0$ et $f(0) = 0$

donc $f^{-1}(]0,\alpha[) =]\lim_{x\to0^+} f^{-1}(x), \lim_{x\to\alpha} f^{-1}(x)[$

$=]0,\alpha[$

c-à-d $f^{-1}(U_n) \in]0,\alpha[$

الشعبة أو المسلك : .... المستوى ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مـادة : ....

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

donc $U_{n+1} \in]0,\alpha[$

Conclusion

0,5 $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \in]0,\alpha[$

2/a- g est continue et strict croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

et $]0,\alpha[\subset \mathbb{R}^{+*}$

donc $g(]0,\alpha[) =]\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to\alpha} g(x)[$

$=]\ 0, g(\alpha)[$ (car g est continue en α)

0,5 $=]0, 1[$

b Soit $x \in]0,\alpha[$

$0 < g(x) < 1 \Rightarrow 0 < \frac{f(x)}{x} < 1$

$\Rightarrow f(x) < x$

$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(x)$ (car f^{-1} est strict croissante sur I)

0,5 $\Rightarrow x < f^{-1}(x)$

or $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \in]0,\alpha[$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n < f^{-1}(U_n)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n < U_{n+1}$

donc (U_n) est strictement croissante

c- (U_n) est croissante, (U_n) est majorée par α (car $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n < \alpha$)

0,5 donc (U_n) est convergente.

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20
....

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

Suite (Deuxième partie ex 1)

3/ on a :

\# $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \in]0,\alpha[$

c-à-d $U_n \in [0,+\infty[$

\# f^{-1} est continue sur $[0,+\infty[= I$

\# et $f^{-1}(I) \in I \quad$ (car $f^{-1}(I) = I$)

\# $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

\# (U_n) est convergente et

$\lim_{n\to+\infty} (U_n) = l$

D'après le théorème du point fixe :

l est la solution de $f^{-1}(x) = x$

on a $f^{-1}(0) = 0$ et $f^{-1}(\alpha) = \alpha$

or comme (U_n) est strict croissante

donc (U_n) est majorée par sa limite

c-à-d $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n < l$

or $0 < U_n < \alpha$

donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

0,5

Troisième partie :

1/a- Soit $x \in I$ et soit $t \in I$

$\forall t \in I$

$f(t) \geq 0$

Si $x \geq 1$

donc $\int_1^x f(t)dt \geq 0$

$\Rightarrow \int_x^1 f(t)dt \leq 0$

$\Rightarrow F(x) \leq 0$

0,1

Si $x \in [0,1[$

donc $\int_x^1 f(t)dt \geq 0$

$\Rightarrow F(x) \geq 0$

donc

Si $x = 1$

donc $F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$

x	0	1	$+\infty$
$F(x)$	$+$	0	$-$

b- f est continue sur I

et $1 \in I$

donc $x \longrightarrow \int_1^x f(t)\,dt$ est la primitive de f

qui s'annule en 1, on la notera H.

0,25

$$\begin{cases} H \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I \quad H'(x) = f(x) \\ H(1) = 0 \end{cases}$$

donc $\forall x \in I \quad F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt = -H(x)$

0,25

donc F est dérivable sur I

et $\forall x \in I$:

$F'(x) = -H'(x) = -f(x) = -x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 0,5

c/ on sait que $\forall x > 0$

$f(x) > 0$

$\Rightarrow -f(x) < 0$

$\Rightarrow F'(x) < 0$

donc F est strict décroissante sur $I - \{0\}$ 0,25

puisque F est dérivable donc continue sur I

alors F est strictement décroissante sur I.

2/a- Soit $x \geq 1$ et soit $t \in [1, x]$

f est strict croissante sur I

donc $\forall t \geq 1$

$f(t) \geq f(1)$

$\Rightarrow f(t) \geq \ln(2)$

$\Rightarrow \int_1^x f(t)\,dt \geq \int_1^x \ln(2)\,dt$ car $x \geq 1$

$\Rightarrow \int_x^1 f(t)\,dt \leq \ln(2) \int_x^1 dt$

$\Rightarrow F(x) \leq [t]_x^1 \cdot \ln(2)$

$\Rightarrow F(x) \leq (1-x)\ln(2)$

donc

$\forall x \geq 1 \quad F(x) \leq (1-x)\ln(2)$ 0,5

b. Déduction :

$\lim_{x \to +\infty} (1-x)\ln(2) = -\infty$

D'après le théorème d'ordre et limite :

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$ 0,25

3/a- Soit $x>0$

$F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 t^3 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) dt$

en pose : $\begin{cases} u(t) = \ln(1+\frac{1}{t}) \\ v'(t) = t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t}} = \dfrac{-\frac{1}{t}}{1+t} = \dfrac{-1}{t(1+t)} \\ v(t) = \dfrac{t^4}{4} \end{cases}$

donc $F(x) = \left[\frac{t^4}{4} \times \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{t^4}{4} \times \frac{1}{t(1+t)}\,dt$

$= \frac{1}{4}\ln(2) - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\,dt$

0,5 donc $\forall x>0$

$F(x) = \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\,dt$

b/ Soit $x>0$

$\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\,dt = \int_x^1 t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\,dt$

$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t|\right]_x^1$

0,5 $= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln(2) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)$

donc $\forall x>0$

$\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\,dt = \frac{5}{6} - \ln(2) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)$

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE D'ÉDUCATION ET DE FORMATION RÉGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

Suite exercice 11 (3e partie)

3/c – D'après ce qui précède

$\forall x > 0$

$F(x) = \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6} - \ln(2) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right)$

$= \frac{\ln(2)}{4} - \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\ln(1+x) + \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4}$

0,5

$= \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

d –

$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

0,25

$= \boxed{\frac{5}{24}}$

Justification :

$\ast\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{12} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{8} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{4} = 0$

$\ast\ \lim_{x\to 0^+} 1 + x = 1$

et ln est continue en 1

donc $\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) = \ln(1) = 0$

$\ast$ et $\lim_{x\to 0^+} -\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{4} \times f(x) = 0 \times f(0) = 0$

car f est continue à droite en 0

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

F est continue sur I car elle est dérivable sur $I = [0, +\infty[$
donc F est continue à droite en 0

0,25

et $F(0) = \int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \frac{5}{24}$

4/ a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$2k + 1 > 2k$

$\Rightarrow \frac{2k+1}{2n} > \frac{k}{n}$

et $\left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right] \subset [0, +\infty[$

en sait que f est contine sur $[0, +\infty[$
donc f est contine sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right]$
D'après le théorème de la moyenne
$\exists c \in \left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right]$

$$f(c) = \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(t)\,dt\right) \times \frac{1}{\frac{2k+1}{2n} - \frac{k}{n}}$$

$$\Leftrightarrow f(c) = \left(\int_1^{\frac{2k+1}{2n}} f(t)\,dt + \int_{\frac{k}{n}}^1 f(t)\,dt\right) \times \frac{1}{\frac{1}{2n}}$$

$$\Leftrightarrow f(c) = \left(F\left(\frac{k}{n}\right) - \int_{\frac{2k+1}{2n}}^1 f(t)\,dt\right) \times 2n$$

$$\Leftrightarrow f(c) = \left(F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right) \times 2n$$

0,5

Encadrent :

on a :

$0 \leq \frac{k}{n} \leq c \leq \frac{2k+1}{2n} \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(c) \leq f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$

car f est strict croissante sur I

$$\frac{k}{n} \leq c \leq \frac{2k+1}{2n} \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \left(F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right) \times 2n \leq f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$$

(car $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{2n} > 0$)

$$\Rightarrow -\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

on a

$$\frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1)$$

or on remarque que $0 < \frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) < f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$ car f est strict croissante sur I

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) < \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) > -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \quad (2)$$

on pose $p = k+1$

on a $\frac{k+1}{n} = \frac{p}{n}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{-1}{2n} \sum_{p=1}^{p=n} f\left(\frac{p}{n}\right) \quad (3)$$

donc d'après (1), (2) et (3) ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

$$\frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,

الشعبة أو المسلك : .... المستوى ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : ....

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

التقدير المفسر للنقطة

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

c/ On a :

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{2}\times\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right)$$ (Suite de Reimann)

Prenons $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

f est contine sur $[0,1]$ car $[0,1]\subset I$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\times\frac{5}{24} = -\frac{5}{48}$$ d'après 3/d

* et on a :

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{b-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right)$$

Prenons $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

f est contine sur $[0,1]$ car $[0,1]\subset I$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{2}\times\int_0^1 f(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\times\frac{5}{24}$$

$$= -\frac{5}{48}$$

D'après les critères de convergence :

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

$$\boxed{\text{et } \lim_{n\to+\infty} v_n = -\frac{5}{48}}$$

0,25