Série ou Filière : .... Niveau : 2107

797513

Note définitive sur 20

20/20

Matière : MATH

Appréciations expliquant la note chiffrée :

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : Taha Ibrahim

Exercice 1

Partie I :

1- a/ On a : $f_n(x) - nx + 2 = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx - nx + 2$

$= \frac{-2e^x}{1+e^x} + 2 = \frac{-2e^x + 2 + 2e^x}{1+e^x} = \frac{2}{1+e^x}$

alors $\lim_{x \to +\infty} (f_n(x) - nx + 2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0$

car $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$

0,5

Donc (C_n) admet une asymptote oblique d'équation $y = nx - 2$ au voisinage de $+\infty$

b/ On a : $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$

et on a puisque $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = 0$, car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

alors $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2e^x}{1+e^x} + nx\right) - nx = 0$,

0,5

càd : $\lim_{x \to -\infty} (f_n(x) - nx) = 0$

Alors (C_n) admet une asymptote d'équation $y = nx$ au voisinage de $-\infty$.

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

2- a/ On a : $f(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$

alors

On a : $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc : les fonctions $x \mapsto -2e^x$ et $x \mapsto 1+e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

De plus $x \mapsto 1+e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

alors $x \mapsto \frac{-2e^x}{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto nx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

alors f_n dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f_n'(x) = \left(\frac{-2e^x}{1+e^x}\right)' + n$$

$$= \frac{(-2e^x)'(1+e^x) - (-2e^x)(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} + n$$

$$= \frac{-2e^x(1+e^x) + 2e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} + n = \frac{-2e^x(1+e^x - e^x)}{(1+e^x)^2} + n$$

$$= \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$$

0,5

b/ On a : $4e^x - (1+e^x)^2 = 4e^x - (1 + 2e^x + e^{2x})$

$$= 4e^x - 1 - 2e^x - e^{2x}$$

$$= -e^{2x} + 2e^x - 1 = -(e^x - 1)^2 \leq 0$$

0,5

alors $4e^x \leq (1+e^x)^2$

et comme $(\forall x \in \mathbb{R})$, $(1+e^x)^2 > 0$

alors $\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

c/ On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f_n'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$

- Pour $n = 0$, on a : $f_0'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

car $(\forall x \in \mathbb{R})$, $e^x > 0$

Donc f_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

$f'_n(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$

on : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

alors :

$\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} < \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$ alors : $\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} < 1$

0,5

alors : $\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} > -1 \Rightarrow f'_n(x) > n - 1 \geq 0$

Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (pour $n \neq 0$)

3 - a/ On a : (T_{n_0}) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

puisque : $f'(0) = \frac{-2}{(1+1)^2} + n = \frac{-2}{4} + n = n - \frac{1}{2}$

et $f(0) = \frac{-2}{1+1} = -1$

0,5

alors (T_{n_0}) : $y = (n - \frac{1}{2})x - 1$

b / On a : f' dérivable sur $\mathbb{R}$

et $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f''(x) = \left(\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}\right)'$

$= \frac{(-2e^x)'(1+e^x)^2 + 2e^x((1+e^x)^2)'}{(1+e^x)^4}$

0,5

$= \frac{-2e^x(1+e^x)^2 + 2e^x \cdot 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$ $(1+e^x \neq 0)$

$= \frac{-2e^x[1+e^x - 2e^x]}{(1+e^x)^3} = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^3}(1-e^x)$

alors le signe de f'' est celui de $e^x - 1$

Donc $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

et $f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

Alors f'' s'annule et change de signe au point

$I(0, -1)$

Alors le point I est le seul point inflexion de (C_n)

النقطة النهائية	على 20	الشعبة أو المسلك : .... المستوى : ....
....		مادة : ....
.... على عشرون	بالحروف	التقدير المفسر للنقطة ....

خاص بكتابة الامتحان

اسم المصحح(ة) وتوقيعه(ها) : ....

4-/ les courbes (C_0) et (C_2) :

. f_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, son tableau de variations.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
f_0'	$-$
$f_0(x)$	$0 \searrow -2$

$\lim_{x\mapsto -\infty} f_0(x) = \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = 0$

$\lim_{x\mapsto +\infty} f_0(x) = \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x}$

$= \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{-2}{e^{-x}+1} = -2$

. f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

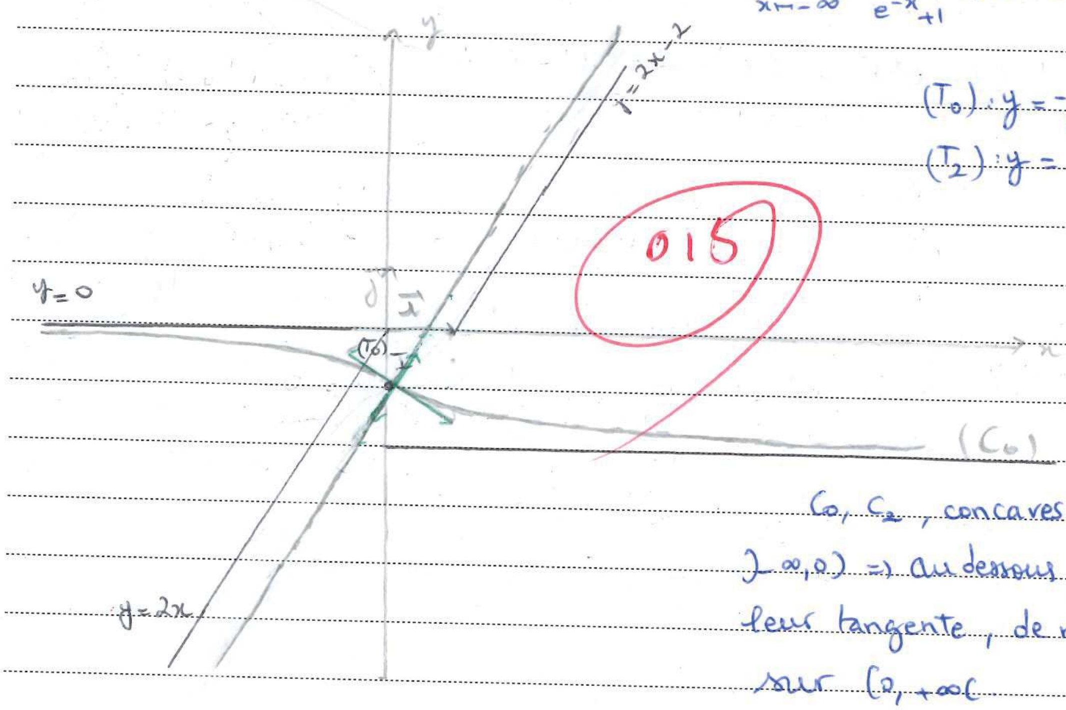
x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
f_2'	$+$
$f_2(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$\lim_{x\mapsto -\infty} f_2(x) = \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} + 2x$

$= -\infty$

$\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} + 2x$

$= \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{-2}{e^{-x}+1} + 2x = +\infty$



$(T_0) : y = -\frac{1}{2}x - 1$

$(T_2) : y = \frac{3}{2}x - 1$

015

$y = -2$

C_0, C_2, concaves sur $]-\infty, 0)$ => au dessous de leur tangente, de même sur $(0, +\infty[$

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

Série ou Filière : Sc maths A Niveau : 2Bac

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : Mathématiques

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE :

5- a/ On a :

$A(t) = \int_0^t |f_n(x) - (nx - 2)|\, dx$ (u.a) (u.a = 1cm²)

D'après 1-a/ $f_n(x) - (nx-2) = \frac{2}{1+e^x} > 0$

alors

$A(t) = \int_0^t \frac{2}{1+e^x}\, dx = 2\int_0^t \frac{1}{1+e^x}\, dx = 2\int_0^t \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx$

$= -2\int_0^t \frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}}\, dx = -2\left[\ln|1+e^{-x}|\right]_0^t$

$= -2\left(\ln|1+e^{-t}| - \ln|1+1|\right) = -2\left(\ln(1+e^{-t}) - \ln 2\right) cm^2$

1,5

b-/ On a $(\forall t > 0)$; $A(t) = -2\left(\ln(1+e^{-t}) - \ln 2\right)$

$A(t) = 2\left(\ln 2 - \ln(1+e^{-t})\right)$

alors $\lim_{t \to +\infty} A(t) = \lim_{t \to +\infty} 2\left(\ln 2 - \ln(1+e^{-t})\right) = 2\ln 2$

0,5

car $\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$, et $\lim_{t \to +\infty} 1 + e^{-t} = 1$, ln continue

en 1 et $\ln(1) = 0$, alors $\lim_{t \to +\infty} \ln(1+e^{-t}) = 0$

Partie II :

1-a/ Soit $g_0(x) = f_0(x) - x = -\frac{2e^x}{1+e^x} - x$.

On a,

f_0 continue (car elle est dérivable) sur IR, donc g_0 continue sur IR

et $(\forall x \in \mathbb{R})$, f_0 est strictement décroissante sur IR

et $x \mapsto -x$ strictement décroissante sur IR

alors g_0 est strictement décroissante sur IR comme somme de

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

2 fonctions strictement décroissante.

alors g_0 est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g_0(\mathbb{R})$

et $g_0(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x \to +\infty} g_0(x) ; \lim\limits_{x \to -\infty} g_0(x) \right[$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} - x = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{e^{-x}+1} = -2$ $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \right)$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} g_0(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} - x = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = 0$

0,5

D'où g_0 est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

et puisque $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $g_0(x) = 0$

càd. $f_0(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

b/ On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f_0'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$

Comme $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$ (car $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > 0$)

alors :

$(\forall x \in \mathbb{R})$, $|f_0'(x)| = -f_0'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

0,5

On a d'après I-2-b/

$(\forall x \in \mathbb{R})$, $\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$ càd $2 \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

alors $\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} \leq \frac{1}{2}$

alors $(\forall x \in \mathbb{R})$, $|f_0'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2-a/ On a : f_0 continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[u_n, \alpha]$ (ou $[\alpha, u_n]$), et dérivable sur $]u_n, \alpha[$ (ou $]\alpha, u_n[$).

et $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|f_0'(x)| \leq \frac{1}{2}$

or $(u_n, \alpha) \in \mathbb{R}^2$

alors d'après l'inégalité des accroissement finis :

$$|f_0(u_n) - f_0(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

puisque $f_0(u_n) = u_{n+1}$

et α solution de $f_0(x) = x$, alors $f_0(\alpha) = \alpha$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0,5

b/ Montrons par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |\alpha|$

- pour $n = 0$ on a : $|u_0 - \alpha| = |0 - \alpha| = |\alpha|$

et $(\frac{1}{2})^0 |\alpha| = |\alpha|$

alors $|u_0 - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^0 |\alpha|$ (vrai)

- soit $n \in \mathbb{N}$:

supposons que $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |\alpha|$

et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1} |\alpha|$

On a : $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |\alpha|$

Donc $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1} |\alpha|$

or : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1} |\alpha|$.

- D'où d'après le principe de récurrence :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |\alpha|$.

0,5

c/ On a $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |\alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$

D'où $\begin{cases} |u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |\alpha| \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n |\alpha| = 0 \end{cases}$

0,5

الشـعبة أو المسلك : .... المستوى ....

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مـادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

alors $\lim_{n\to+\infty} u_n - \alpha = 0$

D'où (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Partie III :

1- a/ On a : $(\forall n \geq 2)$:

f_n continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors

f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R})$

$f_n(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f_n(x) ; \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[$.

On a déjà montré que : $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

0,18

(car $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = -2$)

alors $f_n(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

et $0 \in \mathbb{R}$

alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}$.

b/ On a : $f_n(x_n) = 0$.

et on a : $f_n(0) = \frac{-2e^0}{1+e^0} + n\times 0 = \frac{-2}{2} = -1$.

et $f_n(1) = \frac{-2e}{1+e} + n = n - \frac{2e}{1+e}$

0,15

on a : $n \geq 2 > 1,47 > \frac{2e}{1+e}$

alors $n - \frac{2e}{1+e} > 0$, alors $f_n(1) > 0$

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

Série ou Filière : Sc. maths A Niveau : 2Bac

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : Mathématiques

Note définitive sur 20 ....

Appréciations expliquant la note chiffrée ....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

Donc on a : $f_n(0) < 0 < f_n(1)$

càd : $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$

Puisque f_n est strictement croissante (pour $n \geq 2$) sur $\mathbb{R}$

alors $0 < x_n < 1$

2_a/ On a : $(\forall n \geq 2)$;

$$f_{n+1}(x_n) = \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + (n+1)x_n = \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + nx_n + x_n$$

$$= f_n(x_n) + x_n = x_n > 0$$

Car $\begin{cases} f_n(x_n) = 0 \\ \text{et } x_n > 0 \end{cases}$

0.5

Alors $(\forall n \geq 2)$; $f_{n+1}(x_n) > 0$.

b_/ On a : $f_{n+1}(x_n) > 0$

et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$

0.5

alors : $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$

et puisque $(\forall n \geq 2)$, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

alors : $x_n > x_{n+1}$, càd que $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante

c_/ On a : $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et minorée par 0

0.5

alors la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente

3_a/ On a :

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

$(\forall n \geq 2)$: $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{-2e^{\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{1}{n}}} + 1$

$$= \frac{-2e^{\frac{1}{n}} + 1 + e^{\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{1}{n}}}$$

on a : $n \geq 2 > 0$ donc $\frac{1}{n} > 0$

et exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. 015

alors $e^{\frac{1}{n}} > e^0 = 1 \Rightarrow 1 - e^{\frac{1}{n}} < 0$

et $(\forall n \geq 2)$, $1 + e^{\frac{1}{n}} > 0$

alors $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ ①

. On a :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)\right) = \frac{-2e^{\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)}}{1+e^{\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)}} + \frac{2e}{1+e}$$

$$= f_0\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)\right) - f_0(1)$$

car $f_0(x) = \dfrac{-2e^x}{1+e^x}$

Puisque d'après 1_b/

$\frac{2e}{1+e} < n$ et $n > 0$ alors $\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right) < 1$

et f_0 strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

alors $f_0\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)\right) > f_0(1)$

alors $f_n\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)\right) > 0$ ②

D'après ① et ②, on a :

$$f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) < 0 < f_n\left(\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{2e}{1+e}\right)\right) \Rightarrow f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) < f_n(x_n) < f_n\left(\tfrac{1}{n}\,\tfrac{2e}{1+e}\right)$$

et puisque

f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

alors $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$ $(\forall n \geq 2)$

b-/ On a : $(\forall n \geq 2)$; $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$

puisque :

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right) = 0$

0,25

alors $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

. On a : $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$ et $n > 0$ alors :

$1 < n x_n < \frac{2e}{1+e}$

On a :

$f_n(x_n) = 0$, alors : $\frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + n x_n = 0$

0,25

alors : $n x_n = \frac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}}$

alors $\lim_{n \to +\infty} n x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}}$

puisque $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ et exp continue en 0 et $e^0 = 1$.

alors $\lim_{n \to +\infty} n x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} = \frac{2e^0}{1+e^0} = \frac{2}{2} = 1$.

4-a/ On a : $(\forall n \geq 2)$; (x_n) est strictement décroissante donc elle est majorée par son premier terme qui est x_2, alors $n \geq 2 \Rightarrow x_n \leq x_2$.

0,5

b-/ On a : $(\forall n \geq 2)$; $0 < x_n < 1$

et : $x_n \leq x_2$ alors $0 < x_n \leq x_2$.

la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, alors $0 < (x_n)^n \leq (x_2)^n$

et puisque $(\forall k \in \mathbb{N})$; $0 < x_k < 1$

0,5

alors : $0 < x_2 < 1$ d'où $\lim_{n \to +\infty} (x_2)^n = 0$

الشعبة أو المسلك : .... المستوى ....

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

امتحان نيل شهادة البكالوريا

النقطة النهائية	على 20
....	بالحروف

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

Ainsi $\begin{cases} 0 \leq (x_n)^n \leq (x_2)^n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (x_2)^n = 0 \end{cases}$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)^n = 0$.

Exercice 2 : 1-a/ À la fin des feuilles. (dernière page)

1-b/ On a : $(E) : z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$

alors pour $c = a - b$

$(E) : z^2 - (a+b+a-b)z + (a-b)(a+b) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 2az + (a^2 - b^2) = 0$

pour $a = i$

$(E) : \Leftrightarrow z^2 - 2iz + (-1 - b^2) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 2iz - (1 + b^2) = 0$

$\Delta = (2i)^2 + 4(1+b^2) = -4 + 4 + 4b^2 = (2b)^2$

alors : $z_1 = \dfrac{2i + 2b}{2} = b + i$ $\quad (z_1 = a + b)$

$z_2 = \dfrac{2i - 2b}{2} = i - b$ $\quad (z_2 = c = a - b)$

0,5

Alors $z_1 = b + i = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i5\pi/12}$

puisque $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ alors $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$

alors la forme exponentielle de z_1 est $z_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i5\pi/12}$

. Pour $z_2 = i - b = e^{i\pi/2} - e^{i\pi/3}$

$= e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\pi/12}\right) = 2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{11\pi}{12}}$

Série ou Filière : Sc maths A Niveau : 2Bac

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : Mathématiques

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE :

et puisque $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ alors $2\sin(\frac{\pi}{12}) > 0$

Donc la forme exponentielle de z est $z = 2\sin(\frac{\pi}{12})\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

2 – a/ Soit R_1 la rotation de centre $P(p)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

$R_1(B) = A(a) \iff a - p = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - p)$

$\iff a - p = i(b - p)$

$\iff a - p = ib - ip$

$\iff p(-1 + i) = ib - a$

$\iff p(-1+i)(-1-i) = (ib - a)(-1-i)$ (*)

0,5

Puisque $(-1+i)(-1-i) = (-1+i)(\overline{-1+i}) = |-1+i|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

alors (*) $\iff 2p = -ib + b + a + ia$

$\iff 2p = (b + a) + (a - b)i$

Soit R_2 la rotation de centre $Q(q)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$;

$R_2(C) = A \iff a - q = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c - q)$

$\iff a - q = -i(c - q)$

$\iff a - q = -ic + iq$

$\iff q(-1 - i) = -ic - a$

$\iff q(1 + i) = ic + a$

$\iff q(1+i)(1-i) = (ic + a)(1 - i)$

$\iff q\,|1+i|^2 = ic + c + a - ia$

$\iff 2q = c + a + (c - a)i$

0,5

b/ Puisque $D(d)$ est le milieu de $[BC]$

alors : $d = \frac{b+c}{2}$

alors :

$$\frac{p-d}{q-d} = \frac{p-\frac{b+c}{2}}{q-\frac{b+c}{2}} = \frac{2p-(b+c)}{2q-(b+c)}$$

$$= \frac{b+a+(a-b)i-b-c}{c+a+(c-a)i-b-c} = \frac{a-c+(a-b)i}{a-b+(c-a)i}$$

$$= \frac{a-c+ai-ib}{a-b+ic-ia} = \frac{a(1+i)-(c+ib)}{a(1-i)-(-ic+b)}$$

$$= \frac{i\left[a(-i+1)-(-ic+b)\right]}{a(1-i)-(-ic+b)} = i$$

0,5

c/ On a : $\frac{p-d}{q-d} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

alors $\left|\frac{p-d}{q-d}\right| = |e^{i\frac{\pi}{2}}| = 1 \Rightarrow PD = QD$

Donc PDQ est isocèle en D (1)

et : $\frac{p-d}{q-d} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow (\overrightarrow{DQ}, \overrightarrow{DP}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

$\Rightarrow (PD) \perp (DQ)$

$\Rightarrow$ PDQ rectangle en D (2)

0,5

D'après (1) et (2), PDQ est rectangle isocèle en D.

3-/ Soient e et f les affixes des points E et F respectivement.

- E symétrique de B par rapport à P, alors P est le milieu de [EB]

alors $p = \frac{e+b}{2} \Rightarrow e = 2p - b$.

- F le symétrique de C par rapport à Q, alors Q est le milieu de [FC]

alors $q = \frac{c+f}{2} \Rightarrow f = 2q - c$.

- Puisque K est le milieu de [EF]

alors :

$$K = \frac{e+f}{2} = \frac{2p-b+2q-c}{2}$$

$$= \frac{b+a+(a-b)i-b+c+a+(c-a)i-c}{2}$$

$$= \frac{2a+i(a-b+c-a)}{2} = a+\frac{i}{2}(c-b).$$

0,5

b/ On a : $\frac{p-d}{q-d} = i \notin \mathbb{R}$.

alors P, Q, D ne sont pas alignés. (1)

et on a :

$$\frac{p-d}{q-d} \times \frac{q-K}{p-K} = \frac{p-d}{q-d} \times \frac{2q-2K}{2p-2K}$$

$$= i \times \frac{c+a+(c-a)i-2a-i(c-b)}{b+a+(a-b)i-2a-i(c-b)}$$

$$= i \times \frac{c-a+i(c-a-c+b)}{b-a+i(a-b-c+b)}$$

0,5

$$= i \times \frac{c-a+i(b-a)}{b-a+i(a-c)} = \frac{i(c-a)-(b-a)}{(b-a)-i(c-a)} = -1 \in \mathbb{R}$$

(2)

De (1) et (2), on déduit que K, P, Q, D sont cocycliques.

Exercice 3.

Partie I

1-/ On a : $47 \times 11 - 43 \times 12 = 487 - 486 = 1$.

alors (11, 12) est une ~~solution~~ particulière de (E).

0,25

2-/ On a : $\begin{cases} 47x - 43y = 1 \\ 47 \times (11) - 43 \times (12) = 1. \end{cases}$

الشعبة أو المسلك : .... المستوى ....

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

امتحان نيل شهادة البكالوريا

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

مـادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

Par différence, on obtient:

$47(x-11)-43(y-12)=0$

càd $47(x-11)=43(y-12)$ (0)

alors $43 / 47(x-11)$ (*)

. On a: les nombres premiers inférieurs ou égal à $\sqrt{43}$ et à $\sqrt{47}$ sont 2, 3, 5 et ne divisent pas 43 et 47

alors 43 et 47 premiers et $43 \neq 47$

alors $43 \wedge 47 = 1$

Donc d'après Gauss: (*) $\Rightarrow 43 / x-11$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x-11 = 43k$ (**)

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 43k+11$

0,75

On remplace (**) dans (0), on obtient

$47 \times 43k = 43(y-12)$

$\Rightarrow 47k = y-12 \Rightarrow y = 47k+12$

Réciproquement: si $x = 43k+11$ et $y = 47k+12$

on a: $47x-43y = 47(43k+11)-43(47k+12)$

$= 47\times 43k + 47\times 11 - 43\times 47k - 43\times 12$

$= 47\times 11 - 43\times 12 = 1$.

Donc $S = \{(11+43k\ ;\ 12+47k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

Partie II :

1-a/ Supposons que x et 43 ne sont pas premiers entre eux, et 43 premier, alors

0,25

$43 / x \Rightarrow x \equiv 0\ (43)$

$\Rightarrow x^{41} \equiv 0\ (43)$ et on a $x^{41} \equiv 4\ (43)$

$\Rightarrow 4 \equiv 0\ (43) \Rightarrow 43 / 4$ (faux)

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

Série ou Filière : Sc. maths A Niveau : 2Bac

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE
D'EDUCATION ET DE FORMATION
REGION CASABLANCA - SETTAT

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : Mathématiques

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE :

Donc $x \wedge 43 = 1$

. On a : $\begin{cases} x \wedge 43 = 1 \\ 43 \text{ premier} \end{cases}$

Donc d'après Fermat : $x^{43-1} \equiv 1 (43)$

c.à.d : $x^{42} \equiv 1(43)$.

0,25

b-/ On a : $x^{41} \equiv 4(43)$

alors $x \times x^{41} \equiv 4x (43)$

alors $x^{42} \equiv 4x (43)$

et puisque $x^{42} \equiv 1(43)$

alors $4x \equiv 1(43)$

0,25

. On a : $4x \equiv 1(43)$

Donc $11 \times 4x \equiv 11 (43) \Rightarrow 44x \equiv 11 (43)$

$\Rightarrow 43x + x \equiv 11 (43)$

Or $43x \equiv 0 (43)$ donc $x \equiv 11(43)$

0,25

2-/ On a d'après 1/

x solution de (F) $\Rightarrow x \equiv 11 (43)$

Montrons l'équivalence :

→ Si $x \equiv 11(43)$ on a : $x^{41} \equiv 11^{41}(43)$ (1)

On a : $11 \wedge 43 = 1$ et 43 premier

D'après Fermat : $11^{42} \equiv 1(43)$

Donc : $11 \times 11^{41} \equiv 1(43)$

D'où $44 \times 11^{41} \equiv 4(43)$

0,5

et puisque $44 \equiv 1(43)$ alors $11^{41} \equiv 4(43)$ (2)

On remplace (2) dans (1) par la transitivité de la congruence

On obtient : $x^{41} \equiv 4(43)$ alors x solution de (F)

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

Donc : x solution de $(F) \Leftrightarrow x \equiv 11 [43]$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 43k + 11$.

Donc $S_F = \{11 + 43k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Partie III .

1-a/ On a x solution de (S)

alors $\begin{cases} x^{41} \equiv 4 [43] & (i) \\ x^{47} \equiv 10 [47] & (ii) \end{cases}$

Pour (i), on a : d'après la partie II :

$x^{41} \equiv 4 [43] \Leftrightarrow x \equiv 11 [43]$. (1)

Pour (ii) ; supposons que x et 47 ne sont pas premiers entre eux, et 47 premier, alors $47 / x$

càd : $x \equiv 0 [47] \Rightarrow x^{47} \equiv 0 [47]$

$\Rightarrow 10 \equiv 0 [47]$ (faux)

Donc $\begin{cases} x \wedge 47 = 1 \\ 47 \text{ premier} \end{cases}$ D'après Fermat, on a : $x^{46} \equiv 1 [47]$

alors $x \times x^{46} \equiv x [47] \Rightarrow x^{47} \equiv x [47]$ 0,5

et $x^{47} \equiv 10 [47]$ donc $x \equiv 10 [47]$ (2)

D'après (1) et (2), si x solution de (S), alors

x solution de (S') : $\begin{cases} x \equiv 11 [43] \\ x \equiv 10 [47] \end{cases}$.

b/ On a : $\begin{cases} x \equiv 11 [43] \\ x \equiv 10 [47] \end{cases}$

alors $\exists (m, p) \in \mathbb{Z}^2 ;\ \begin{cases} x = 43m + 11 \\ x = 47p + 10 \end{cases}$

alors $43m + 11 = 47p + 10$.

Donc $43m - 47p = -1$

$\Rightarrow 47p - 43m = 1$.

$\Rightarrow (p, m)$ solution de (E)

alors : $\begin{cases} p = 11 + 43k \\ m = 12 + 47k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

0.5

alors $x = 43m + 11 = 43(12 + 47k) + 11$

$= 2021k + 43 \times 12 + 11 = 2021k + 527$

alors $x \equiv 527\ (2021)$.

2-) On a si x solution de (S) alors $x \equiv 527\ (2021)$.

Montrons l'équivalence.

On a si $x \equiv 527\ (2021)$

alors $2021 / x - 527$

et puisque $43 / 2021$ et $47/2021$

alors $\begin{cases} 43 / x - 527 \\ 47 / x - 527 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x \equiv 527\ (43) \\ x \equiv 527\ (47) \end{cases}$

Comme $527 \equiv 11\ (43)$ et $527 \equiv 40\ (47)$

car $527 = 47 \times 11 + 10$

Donc $\begin{cases} x \equiv 11\ (43) & (i) \\ x \equiv 10\ (47) & (ii) \end{cases}$

0.5

Pour (i), on a d'après Partie II,

$x \equiv 11\ (43) \Rightarrow x^{41} \equiv 4\ (43)$

Pour (ii), on a: $x^{47} \equiv 10^{47}\ (47)$

puisque $10 \wedge 47 = 1$ (car 47 premier et $47 \nmid 10$)

et 47 premier, alors d'après Fermat,

$10^{46} \equiv 1\ (47)$ alors $10^{47} \equiv 10\ (47)$

Par transitivité on aura: $x^{47} \equiv 10\ (47)$

Donc x sol de (S) $\Leftrightarrow x \equiv 527\ (2021)$

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}),\ x = 2021k + 527$.

Alors l'ensemble G des solution de (S) est.

$G = \{2021k + 527,\ k \in \mathbb{Z}\}$. (Suite complexe)

المستوى .... الشعبة أو المسلك : ....

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

امتحان نيل شهادة البكالوريا

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

Suite : (Complexe) : exercice 2 :

1 – a) $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 4ac - 4bc$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$= (a + b - c)^2$

donc $z_1 = \dfrac{a+b+c+a+b-c}{2} = a+b.$

$z_2 = \dfrac{a+b+c-a-b+c}{2} = c.$

0,5

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله