EXAMEN DU BACCALAURÉAT

RÉSERVÉ À L'ACADÉMIE

512737

Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Série/Option : ....

Composition de : ....

Note définitive
20 /20
Vingt Sur Vingt

Appréciation expliquant la note chiffrée : Très bien, continue !!

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ZAKLANE BOUAZZA

I

Exercice n° 1 :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

① - calculons u_1 et u_2 :

0,5

$$u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{3}u_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\times(-1) - \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-5}{6}$$

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\times\frac{-5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{-5}{18} - \frac{1}{2} = \frac{-7}{9}$$

② - Montrons que $u_n < -\frac{3}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

• On a pour $n = 0$ $u_0 = -1 < -\frac{3}{4}$

" c'est vraie"

• supposons que $u_n < -\frac{3}{4}$

et montrons que $u_{n+1} < -\frac{3}{4}$

on a $u_n < -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{3}u_n < -\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{2} < -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} < -\frac{3}{4}$$

1

Alors d'après le principe de récurrence

$$u_n < -\frac{3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

③ - a) - calculer $u_{n+1} - u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

on a $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{2} - u_n$

$$= \left(\frac{1}{3} - 1\right)u_n - \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{2}{3}u_n - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}\left(u_n + \frac{3}{4}\right)$$

1

b) on a $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}\left(u_n + \frac{3}{4}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

et comme $u_n < -\frac{3}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $u_n + \frac{3}{4} < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

et $-\frac{2}{3} < 0$

0,5

alors $-\frac{2}{3}\left(u_n + \frac{3}{4}\right) > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n \geqslant 0 \Rightarrow U_{n+1} \geqslant U_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

④ – On a $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante

et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

alors

la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

0,25

⑤ – on a $V_n = U_n + \frac{3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) –

$V_0 = U_0 + \frac{3}{4} = -1 + \frac{3}{4} = \frac{-1}{4}$

0,25

b) – On a

$\forall n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{3}{4} = \frac{1}{3} U_n - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{3} U_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(U_n + \frac{3}{4}\right)$

$= \frac{1}{3} V_n$

0,5

alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

et de premier terme $\frac{-1}{4}$.

c – $\forall n \in \mathbb{N}$: $V_n = V_0 \times q^{n-0}$ ($(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique)

$= \frac{-1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

0,5

d –

On a $V_n = U_n + \frac{3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n = V_n - \frac{3}{4}$

or $V_n = -\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d'où

$U_n = -\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] \ \forall n \in \mathbb{N}$

0,5

⑥ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right]$

$= \frac{-1}{4}\left[0 + 3\right] = \frac{-3}{4}$

car

$-1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

0,5

Exercice 2 :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \forall x \in]0;+\infty[$$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x = -\infty$ 0,5

car $\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x = +\infty$ 0,5

car $\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

et

$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

2.- a)- $\forall x > 0$: $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)'$

$$= -\frac{(x^2)'}{(x^2)^2} + \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{-2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$$ 0,75

alors

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \quad \forall x \in]0;+\infty[$$

b)- on a $\forall x \in]0;+\infty[$: $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

et $x^3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} > 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} > 0$

alors $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0 \quad \forall x \in]0;+\infty[$

d'où

$$g'(x) > 0 \quad \forall x > 0$$ 0,5

alors g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

3.-

a)- $g\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{e}\right)^2} + \ln\frac{1}{e}$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{1}{e^2}} - \ln e = \cancel{1} - e^2 - \cancel{1} = -e^2$$

$g(1) = 1 - \frac{1}{1} + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$ 0,5

x	0		$1/e$		1		$+\infty$
signe de g'		$+$			0	$+$	
Variation de g	$-\infty$	↗	$-e^2$	↗	0	↗	$+\infty$

0,5

امتحان شهادة البكالوريا

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

النقطة النهائية
/20
على عشرون

الشعبة / المسلك : ....

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بالأكاديمية

إسم المصحح وتوقيعه (ها) : ....

b) on a

• si $x \in]0;1]$

$x \leqslant 1 \Rightarrow g(x) \leqslant g(1)$

car g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

et comme $g(1)=0$

donc

$$g(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in]0;1]$$

• Si $x \in [1;+\infty[$

$x \geqslant 1 \Rightarrow g(x) \geqslant g(1)$

car g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

or $g(1)=0$

donc $g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [1;+\infty[$

c- on a à partir le tableau de variation

$1+e^2+\ln x \geqslant \frac{1}{x^2} \iff 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x \geqslant -e^2$

$\iff g(x) \geqslant -e^2 \quad / \quad -e^2 = g(\frac{1}{e})$

donc d'après le tableau de variation

$1+e^2+\ln x \geqslant \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in [\frac{1}{e};+\infty[$

$$S = [\frac{1}{e};+\infty[$$

1,25

امتحان شهادة البكالوريا

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

النقطة النهائية
/20
على عشرون

الشعبة / المسلك :

مادة :

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح وتوقيعه (ها) :

خاص بالأكاديمية

(2) - a) - $t^2 + t - 2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$

alors l'équation $t^2 + t - 2 = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$

$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 - 3}{2} = -4/2 = -2$

et

$t_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 2/2 = 1$

0,5

alors $S = \{-2 ; 1\}$

b) - $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

on pose $t = e^x \; / \; t > 0$

alors $t^2 + t - 2 = 0$

0,25

et on a d'après la question (2.a) les solutions de l'équation $t^2 + t - 2 = 0$ sont $S = \{-2 ; 1\}$

$\Leftrightarrow t = -2$ ou $t = 1$

$\Leftrightarrow e^x = 1$ car $e^x > 0$

alors $\ln e^x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 0$

0,75

d'où

$S = \{0\}$

(3) - On a $h(x) = e^x + \frac{2 \ln x}{x} \quad \forall x \in]0 ; +\infty[$

$= (e^x)' + 2 \ln x \times (\ln x)'$

$= (e^x)' + 2 \times \left(\frac{(\ln x)^{1+1}}{2} \right)'$

Donc parmis les primitives de h sur $]0 ; +\infty[$

On a $H(x) = e^x + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + 20$

N

Alors $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0;\sqrt{e}]$ " f est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{e}]$ "

- Si $x \in [\sqrt{e};+\infty[$

$x \geqslant \sqrt{e} \Rightarrow \ln x \geqslant \ln\sqrt{e} \Rightarrow \ln x \geqslant \frac{1}{2}\ln e$

$\Rightarrow 2\ln x \geqslant 1$

$\Rightarrow 2\ln x - 1 \geqslant 0$

1

donc

$f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [\sqrt{e};+\infty[$ " f est strictement croissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$ "

c).

$$f(\sqrt{e}) = (\ln\sqrt{e})^2 - \ln\sqrt{e}$$
$$= (\ln e^{\frac{1}{2}})^2 - \ln e^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

0,5

$$f(e) = (\ln e)^2 - \ln e = 1 - 1 = 0$$

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{e}) = -\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0,5

③.

a. On a f' s'annule en $\sqrt{e}$
et f est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{e}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$

Alors f admet une valeur minimale $f(\sqrt{e}) = -\frac{1}{4}$

0,5

b. On a l'image de l'image de l'intervalle $[\sqrt{e};e]$ par f

$$f([\sqrt{e};e]) = [f(\sqrt{e}); f(e)] = \left[-\frac{1}{4};0\right]$$

1

Puisque f est strictement croissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$ en particulier sur $[\sqrt{e};e]$

Exercice n° 4 :

1-

a) - $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = 1$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} + \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 + 1 = 1$ 0,5

~~puisque~~ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 - 0} = 1$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = -\infty$$ 0,5

car on a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$

et

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}}$

$= 0$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{e^x} = -\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = 0$

$\cancel{\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x^2} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$

car ~~on a $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$~~

~~et~~

~~$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x^2} = \ldots$ puisque $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$~~

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x^2} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \times \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$ 0,5

$= +\infty$

car $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x^2} \right) = +\infty$

امتحان شهادة البكالوريا

وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

النقطة النهائية
/20
على عشرون

الشعبة / المسلك :

مادة :

التقدير المفسر للنقطة

خاص بالأكاديمية

إسم المصحح وتوقيعه (ها) :

(2) - a)- $t^2+t-2=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Delta = 1^2 - 4\times(-2)\times 1 = 1+8 = 9 > 0$

alors l'équation $t^2+t-2=0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$

$t_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-1-3}{2} = -4/2 = -2$

et

$t_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 2/2 = 1$

alors $S = \{-2 ; 1\}$

0,5

b.)- $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

on pose $t = e^x \;/\; t > 0$

alors $t^2+t-2=0$

0,25

et on a d'après la question (2.a) les solutions de l'équation $t^2+t-2=0$ sont $S = \{-2 ; 1\}$

$\Leftrightarrow t = -2$ ou $t = 1$

$\Leftrightarrow e^x = 1$ car $e^x > 0$

alors $\ln e^x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 0$

(1) اذن

$S = \{0\}$

0,75

(3) - on a $h(x) = e^x + \frac{2\ln x}{x} \quad \forall x \in]0;+\infty[$

$= (e^x)' + 2\ln x \times (\ln x)'$

$= (e^x)' + 2\times\left(\frac{(\ln x)^{1+1}}{2}\right)'$

Donc parmis les primitives de h sur $]0;+\infty[$

On a $H(x) = e^x + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + 20$

0