ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ ⵜⴰⵎⵓⵔⵉⵜ ⵏ ⵜⵔⴱⵉⵜ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⴷ ⵓⵙⵙⵎⵔⵙ ⴰⵣⵡⵓⵔ ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

EXAMEN DU BACCALLAUREAT

2152

802571

Série ou Filière : .... Niveau : ....

Matière : MATH

Note définitive sur 20: 19,75

Appréciations expliquant la note chiffrée : تسعة عشر وخمسة وسبعون

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ابن اسعيد اكلا

Exercice 1 :

1) a) résolvons ($\forall x \in \mathbb{R}$) : $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0$

on pose $X = e^x$

résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 - 4X + 3 = 0$

Calculons Δ :

on a $\Delta = (-4)^2 - 4\times 3 = 4 > 0$

donc l'équation admet deux solutions :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{4-\sqrt{4}}{2} = 1 > 0 \\ X_2 = \dfrac{4+\sqrt{4}}{2} = 3 > 0 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} e^{x_1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0 \\ e^{x_2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = \ln(3) \end{cases}$

d'où $S = \{0, \ln(3)\}$

1

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$

on dresse d'abord le tableau de signe de $e^{2x} - 4e^x + 3$

x	$-\infty$	0		$\ln(3)$	$+\infty$
$e^{2x} - 4e^x + 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

d'après ce tableau on déduit que $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \ln 3]$

C'est-à-dire $S = [0, \ln(3)]$

0,5

c) Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

on a $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1 - 2e^x + 2}{e^{2x} - 1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(e^x - 1)^2 - 2(e^x - 1)}{(e^x - 1)(e^x + 1)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cancel{(e^x - 1)}(e^x - 1 - 2)}{\cancel{(e^x - 1)}(e^x + 1)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x - 3}{e^x + 1}\right) = \dfrac{e^0 - 3}{e^0 + 1} = \dfrac{-2}{2} = \boxed{-1}$

0,5

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

③ Montrons que l'équation $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1,0]$

• on pose $g(x)=e^{2x}+e^{x}+4x$ tel que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-1,0]$

et on a $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g'(x)=2e^{2x}+e^{x}+4>0$

si $g'(x)=0$ alors $2e^{2x}+e^{x}+4=0$

Calculons Δ : $\Delta=1-4\times(2)(4)=-31<0$

alors le signe de $g'(x)$ est celui de $2>0$

C'est-à-dire $(\forall x\in\mathbb{R})$: $g'(x)>0$

d'où g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

et par suite g est strictement croissante sur $[-1,0]$

alors $\forall x\in[-1,0]$: $-1\leq x\leq 0 \Rightarrow g(-1)\leq g(x)\leq g(0)$

or $\begin{cases} g(-1)=e^{-2}+e^{-1}-4<0 \\ g(0)=e^{0}+e^{0}+4\times 0=2>0 \end{cases} \Rightarrow g(-1)\times g(0)<0$

• On a d'après les résultats ci-dessus :

• g est dérivable sur $[-1,0]$ donc elle est continue sur $[-1,0]$

• de plus $g(-1)\times g(0)<0$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution α sur $[-1,0]$

et puisque g est strictement croissante sur $[-1,0]$ cette solution est unique tel que $\alpha\in]-1,0[$

0,1

Exercice 2 :

Soit $\begin{cases} U_0=\frac{1}{2} \\ U_{n+1}=\frac{U_n}{3-2U_n} \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

0,1

① $U_1=\frac{U_0}{3-2U_0}=\frac{\frac{1}{2}}{3-2\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{3-1}=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$

② Montrons par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})$: $0<U_n\leq\frac{1}{2}$

• pour $n=0$ on a $0<U_0=\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}$; donc la propriété est vraie pour $n=0$

0,1

• On suppose que $(\forall n\in\mathbb{N})$: $0<U_n\leq\frac{1}{2}$ et on montre que ; $(\forall n\in\mathbb{N})$: $0<U_{n+1}\leq\frac{1}{2}$

on a $0<U_n\leq\frac{1}{2} \Rightarrow -1\leq -2U_n<0 \Rightarrow 2\leq 3-2U_n<3$

$\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2}$ (*) et puisque $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

alors $0 < \frac{u_n}{3-2u_n} \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

donc la propriété est vérifiée pour $n+1$

. d'après le principe de la récurrence : on déduit que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

3) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ — 0,5

• on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3-2u_n}$ (avec $u_n > 0 \Rightarrow u_n \neq 0$)

et d'après (*) dans la question précédente on a

$\frac{1}{3} < \frac{1}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

b) on a d'après la question précédente : — 0,5

$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n < u_n$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$

d'où la suite (u_n) est strictement décroissante

4) a) Montrons $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

on a d'après la question 3) a) $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

donc : pour $n=0$ on a : $u_1 \leq \frac{1}{2} u_0$

pour $n=1$ on a : $u_2 \leq \frac{1}{2} \cdot u_1$ — 0,75

$\vdots \qquad \vdots$

pour n on a : $u_n \leq \frac{1}{2} u_{n-1}$

alors par multiplication des inégalités membre par membre

on déduit que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u_0$

$\Rightarrow u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (1)

de plus on a d'après 2) : $0 < u_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow u_n > 0$ (2)

d'où de (1) et (2) on déduit que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

• Calculons la limite de (u_n)

on a $\left|\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

et on a aussi $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

امتحان نيل شهادة البكالوريا

النقطة النهائية	على 20
....	
.... على عشرون	بالحروف

الشعبة أو المسلك : .... المستوى ....

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الامتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

on déduit donc d'après le théorème de comparaison (théorème des gendarmes) que $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = 0$

(b) Soit $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n = \ln(3-2U_n)$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$:

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(3-2U_n) = 3$

or la fonction ln est continue en 3

d'où par composition des limites on déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln(3)$

0,1

(5) (a) vérifions que $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{U_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{U_n} - 1\right)$

on a $U_{n+1} = \frac{U_n}{3-2U_n} \Rightarrow \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{3-2U_n}{U_n} = \frac{3}{U_n} - 2$ (avec $U_n \neq 0$ car $U_n \leq \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow \frac{1}{U_{n+1}} - 1 = \frac{3}{U_n} - 3$

$\Rightarrow \frac{1}{U_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{U_n} - 1\right)$

donc $(\forall n\in\mathbb{N})$: $\frac{1}{U_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{U_n} - 1\right)$

0,1

(b) on pose $w_n = \frac{1}{U_n} - 1$ tel que $w_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{U_n} - 1\right)$
$= 3.w_n$

alors la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 3$

donc : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $w_n = w_0\, q^n = \left(\frac{1}{U_0} - 1\right)3^n = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - 1\right)3^n$
$= 3^n$

et d'autre part on a posé $w_n = \frac{1}{U_n} - 1 \Rightarrow \frac{1}{U_n} = w_n + 1$

$\Rightarrow U_n = \frac{1}{w_n+1}$ (avec $w_n + 1 \neq 0$ car (w_n) est géométrique de raison 3)

$\Rightarrow U_n = \frac{1}{3^n+1}$

0,1

et par suite : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $U_n = \frac{1}{3^n+1}$

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ / ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ... المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

EXAMEN DU BACCALLAUREAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

Matière : ....

Note définitive sur 20 ....

Appréciations expliquant la note chiffrée : ....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

Problème : Soit $\forall x \in [0;+\infty[$; $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x) = 2x\ln x - 2x \quad si\ x>0 \end{cases}$

1) Montrons que f est continue à droite au point 0

on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x\ln x - 2x) = 0 = f(0)$

Car $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+}(2x) = 0$

d'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$; c'est-à-dire f est continue à droite en 0

0,5

2) a) Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x\ln x - 2x) = \lim_{x\to+\infty}(x(2\ln x - 2))$
$= +\infty$

Car $\lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$

01

b) Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

on a $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(2\ln x - 2) = +\infty$

Car $\lim_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$; donc $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$

01

• Ce résultat ce traduit géométriquement par : (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) a) Calculons $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$

on a $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(2\ln x - 2) = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = -\infty$

0,5

c'est-à-dire f n'est pas dérivable à droite en 0 ; et (C) admet une demi tangente verticale orientée vers le bas au point d'abscisse 0

3) b) on a les fonction $x \to 2x$; $x \to \ln x$ et $x \to 2x$

sont dérivables sur $]0;+\infty[$; donc la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (Comme étant produit et différence des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$)

et $(\forall x \in]0,+\infty[)$: $f'(x) = (2x\ln x - 2x)' = 2\ln x + 2 \cdot x \times \frac{1}{x} - 2$

$= 2\ln x + 2 - 2$

$= 2\ln x$

on a le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\ln x$ sur $]0;+\infty[$ tel que : $\forall x \in]0,1]$: $\ln x \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$; c'est-à-dire f est décroissante sur $]0,1]$ et $f(0) = 0$

et $\forall x \in [1;+\infty[$: $\ln x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$; c'est-à-dire f est croissante sur $[1;+\infty[$.

d'après ces résultats ci-dessus on dresse le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	-2	↗	$+\infty$

$f(1) = 2\ln(1) - 2$
$= -2$

4) a) Résolvons dans $]0;+\infty[$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$

on a $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $f(x) = 0 \iff 2x\ln x - 2x = 0$

$\iff x(2\ln x - 2) = 0$

$\iff 2\ln x = 2$ et $x > 0$

$\iff \ln x = 1$ et $x > 0$

$\iff \boxed{x = e}$

d'où $S = \{e\}$

et on a $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $f(x) = x \iff 2x\ln x - 2x = x$

$\iff 2x(\ln x - 1) = x$

$\iff (\ln x - 1) = \frac{1}{2}$

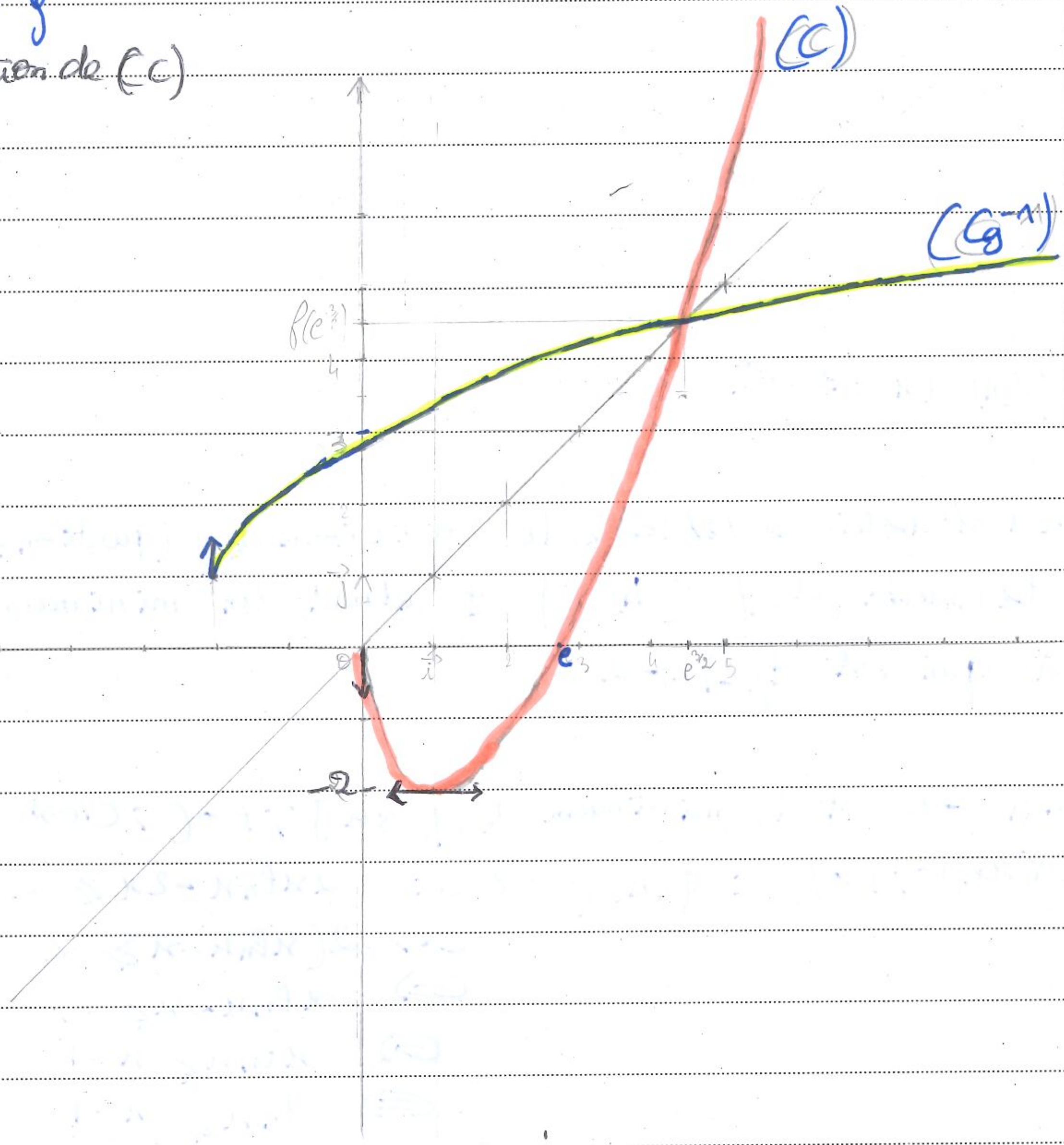
$\iff \ln x = \frac{1}{2} + 1$

$\iff \boxed{x = e^{\frac{3}{2}}}$

[redacted]

d'où $S=\{e^{\frac{3}{2}}\}$

(b) Construction de (C)



1,75

5) a) Montrons que $\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{1+e^2}{4}$

on pose $\begin{cases}u'(x)=x\\ v(x)=\ln x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u(x)=\frac{x^2}{2}\\ v'(x)=\frac{1}{x}\end{cases}$

donc $\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$ 0,5

$=\left(\ln e \cdot \frac{e^2}{2}\right) - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$

$= \frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{2e^2-e^2+1}{4}=\frac{1+e^2}{4}$

(b) en déduisons $\int_1^e f(x)\,dx$:

on a $\int_1^e f(x) = \int_1^e 2x\ln x - 2x\,dx$

$= 2\int_1^e 2x\ln x\,dx - \int_1^e 2x\,dx$

$= 2\left(\frac{1+e^2}{4}\right) - \left[x^2\right]_1^e = \frac{1+e^2}{2} - e^2+1$ 0,5

$= \frac{1+e^2-2e^2+2}{2}$

$\Rightarrow \int_1^e f(x)\,dx = \frac{3-e^2}{2}$

6) a) déterminons le minimum de f sur $]0;+\infty[$

on a d'après le tableau de variations de f (question 3) c)

et la courbe de f (4) c)) f admet un minimum

en 1 qui est $f(1) = -2$

0,5

b) déduisons que $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$

on a -2 est le minimum de f sur $]0;+\infty[$; c'est-à-dire :

$(\forall x \in]0;+\infty[) : f(x) \geq -2 \Leftrightarrow 2x\ln x - 2x \geq -2$

$\Leftrightarrow 2(x\ln x - x) \geq -2$

$\Leftrightarrow x\ln x - x \geq -1$

$\Leftrightarrow x\ln x \geq x-1$

$\Leftrightarrow \ln x \geq \frac{x-1}{x}$

0,1

7) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$

a) on a g est dérivable sur $[1;+\infty[$ (car f l'est sur $[1;+\infty[$)

donc g est continue sur $[1;+\infty[$

de plus g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J

tel que $J = g([1;+\infty[) = [-2;+\infty[$

0,1

b) la construction de la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans 4) b)

8) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} h(x) = x^3+3x \,;\, x \leq 0 \\ h(x) = 2x\ln x - 2x \,;\, x > 0 \end{cases}$

a) étudions la continuité de h au point 0 : on a $h(0) = 0^3 + 3\times 0 = 0$

et on a $\lim_{x\to 0^-} (h(x)) = \lim_{x \to 0^-} (x^3+3x) = 0 = h(0)$

donc h est continue à gauche en 0

et $\lim_{x\to 0^+} (h(x)) = \lim_{x\to 0^+} (2x\ln x - 2x) = 0 = h(0)$

car $\lim_{x\to 0^+} (x\ln x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} (2x) = 0$

donc h est continue à droite en 0

0,1

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

EXAMEN DU BACCALLAUREAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée : ....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

Suite de 8) a) du problème,

on a $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} (h(x)) = h(0) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} (h(x)) = h(0) = 0 \end{cases}$

et puisque la fonction h est continue à droite et à gauche en 0 et $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = h(0) = 0$

Alors h est continue en 0

b) Étudions la dérivabilité de h à gauche en 0

On a $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{h(x)-h(0)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^3+3x}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0^-} (x^2+3) = 3$

donc h est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 3$

et (C_h) admet une demi tangente à gauche en 0

d'équation $\begin{cases} y_g = f'_g(0)(x-0)+f(0) \\ x \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_g = 3x \\ x \leq 0 \end{cases}$

0,5

c) on a $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}(2\ln x - 2)$
$= -\infty$

alors h n'est pas dérivable à droite en 0

et puisque h est dérivable à gauche en 0 et pas dérivable à droite en 0 alors h n'est pas dérivable au point 0

0,25

Exercice 3,

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z^2 - \sqrt{3}\,z + 1 = 0$

Calculons Δ :

on a $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4\times 1 = -1 < 0$

$\Rightarrow \Delta = i^2$

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance alors l'équation admet deux solutions complexes :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{cases}$$

0,25

d'où $S = \left\{ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) ; \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \right\}$

② Soient $a = e^{i\pi/6}$; $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ⓐ on a $a = e^{i\pi/6} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \\ \arg(a) \equiv \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$

0,1

d'où ~~...~~ $a = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

L'écriture algébrique de a est : $\boxed{a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i}$

ⓑ vérifions que : $\bar{a}b = \sqrt{3}$

on a $\bar{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d'où $\bar{a}b = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

0,1

$= \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$

$= \sqrt{3}\left(\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right) = \sqrt{3}\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\right)$

$= \sqrt{3}$

donc $\boxed{\bar{a}b = \sqrt{3}}$

③ Montrons que $h(A) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = k\,\overrightarrow{OA}$

0,25

on a $\overrightarrow{OB} = b - z_0 = b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

et $\overrightarrow{OA} = a - z_0 = a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

on remarque donc que $\overrightarrow{OB} = \sqrt{3}\cdot\overrightarrow{OA}$

C'est-à-dire : $h(A) = B$ avec h est l'homothétie de centre O et de rapport $k = \sqrt{3}$

④ Soit $R\left(a, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tel que $R(M(z)) = M'(z')$

0,1

ⓐ on a $R(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' - a = (z - a)\,e^{i\pi/2}$

$\Leftrightarrow z' = z\cdot e^{i\pi/2} + (1 - e^{i\pi/2})\,a$

$= iz + (1-i)\,a$

ⓑ ~~On a~~ $R(C) = D \Leftrightarrow z_d = i z_c + (1-i)\,a$

$\Leftrightarrow d = i\bar{a} + (1-i)\,a$ (car $z_c = \bar{a}$)

$\Rightarrow d = i\bar{a} + a - ia = i(\bar{a} - a) + a = i\left(2\times\left(\frac{-1}{2}i\right)\right) + a$

Car $\bar{a} - a = 2i\,Im(a)$ $\quad = -i^2 + a = a + 1$

d'où : $R(C) = D \Leftrightarrow d = a + 1$

0,25

ⓒ Soit $I(1)$; Montrons que $ADIO$ est un losange

on a $d = a + 1 \Rightarrow d = a + z_I$

$\Rightarrow d - 0 = a - 0 + z_I - 0$

$\Rightarrow \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OI}$

C'est-à-dire le quadrilatère $ADIO$ est un parallélogramme (δ)

de plus on a $d = a + 1 \Rightarrow d - a = z_I$

$\Rightarrow \vec{AD} = \vec{OI}$

et $AD = OI = 1$ (α)

0,1

et puisque $ADIO$ est un parallélogramme alors $\vec{OA} = \vec{ID}$ (la preuve est que :

$d - 1 = a$

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{ID} = \vec{OA} \\ ID = OA = 1 \end{cases}$ (β)

de (δ) et (α) et (β) ~~on~~ on déduit que $ADIO$ est un losange puisque $\vec{AD} = \vec{OI}$; $\vec{ID} = \vec{OA}$

C'est-à-dire tous ses côtés sont égaux

5) a) vérifions que $d - b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$

on a $d - b = a + 1 - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$\Rightarrow d - b = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - i) - \frac{1}{2}(1 - i)$

$= (1 - i)\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$

0,1

déduisons un argument de $d - b$:

On a $d - b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i) \Rightarrow \arg(d - b) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) + \arg(1 - i)\ [2\pi]$

$\Rightarrow$ ~~et~~ $\quad \Rightarrow \arg(d - b) \equiv \arg(1 - i)\ [2\pi]$

0,25

$\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

(Car $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$)

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

امتحان نيل شهادة البكالوريا

النقطة النهائية	على 20
.... على عشرون	بالحروف

الشعبة أو المسلك : .... المستوى ....

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الامتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

(b) Ecrivons $1-b$ sous forme trigonométrique

on a $1-b = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

0,5

(c) déduisons une mesure de l'angle $(\overline{BI}, \overline{BD})$; (car $\frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$)

$\Rightarrow \frac{4\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3}$)

$\Rightarrow \arg(1-b) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$

on a $\frac{d-b}{z_I - b} = \frac{d-b}{1-b}$

donc $\arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right) \equiv \arg(d-b) - \arg(1-b)\ [2\pi]$

$\equiv \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{5}{12}\pi\ [2\pi]$

0,5

d'où $(\overline{BI}, \overline{BD}) = \frac{5}{12}\pi\ [2\pi]$