Série ou Filière : .... Niveau : 2107

797513

Note définitive sur 20

20,00

Matière : MATH

Appréciations expliquant la note chiffrée : ....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : Taha Ibrahim

Exercice 1

Partie I :

1- a/ On a : $f_n(x) - nx + 2 = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx - nx + 2$

$= \frac{-2e^x}{1+e^x} + 2 = \frac{-2e^x + 2 + 2e^x}{1+e^x} = \frac{2}{1+e^x}$

alors $\lim_{x \to +\infty} (f_n(x) - nx + 2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0$

0,5

car $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$

Donc (C_n) admet une asymptote oblique d'équation $y = nx - 2$ au voisinage de $+\infty$

b/ On a : $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$

et on a puisque $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = 0$, car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

alors $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2e^x}{1+e^x} + nx\right) - nx = 0$,

0,5

c.à.d : $\lim_{x \to -\infty} (f_n(x) - nx) = 0$

Alors (C_n) admet une asymptote d'équation $y = nx$ au voisinage de $-\infty$

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

2- a/ On a : $f(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$

alors

On a : $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc : les fonctions $x \mapsto -2e^x$ et $x \mapsto 1+e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

De plus $x \mapsto 1+e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

alors : $x \mapsto \frac{-2e^x}{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto nx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

alors f_n dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$(\forall x \in \mathbb{R})$, $f_n'(x) = \left(\frac{-2e^x}{1+e^x}\right)' + n$

$$= \frac{(-2e^x)'(1+e^x) - (-2e^x)(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} + n$$

0,5

$$= \frac{-2e^x(1+e^x) + 2e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} + n = \frac{-2e^x(1+e^x-e^x)}{(1+e^x)^2} + n$$

$$= \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n.$$

b/ On a : $4e^x - (1+e^x)^2 = 4e^x - (1+2e^x+e^{2x})$

$= 4e^x - 1 - 2e^x - e^{2x}$

$= -e^{2x} + 2e^x - 1 = -(e^x-1)^2 \leq 0$

alors $4e^x \leq (1+e^x)^2$

0,5

et comme $(\forall x \in \mathbb{R})$, $(1+e^x)^2 > 0$

alors $\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

c/ On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f_n'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$

. Pour $n=0$, on a : $f_0'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

car $(\forall x \in \mathbb{R})$, $e^x > 0$

Donc f_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

$f'_n(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$

on : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

alors :

$$\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} < \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1 \quad \text{alors :} \quad \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} < 1$$

0,5

alors : $\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} > -1 \Rightarrow f'_n(x) > n-1 \geq 0$

Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (pour $n \neq 0$)

3 - a/ On a : $(T_{n_0}) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

puisque : $f'(0) = \frac{-2}{(1+1)^2} + n = \frac{-2}{4} + n = n - \frac{1}{2}$

et $f(0) = \frac{-2}{1+1} = -1$

alors $(T_{n_0}) : y = (n - \frac{1}{2})x - 1$

0,5

b / On a : f' dérivable sur $\mathbb{R}$

et $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f''(x) = \left(\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}\right)'$

$$= \frac{(-2e^x)'(1+e^x)^2 + 2e^x((1+e^x)^2)'}{(1+e^x)^4}$$

0,5

$$= \frac{-2e^x(1+e^x)^2 + 2e^x \cdot 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} \quad (1+e^x \neq 0)$$

$$= \frac{-2e^x[1+e^x - 2e^x]}{(1+e^x)^3} = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^3}(1-e^x)$$

alors le signe de f'' est celui de $e^x - 1$

Donc $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

et $f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

Alors f'' s'annule et change de signe au point $I(0, -1)$

Alors le point I est le seul point inflexion de (C_n)

النقطة النهائية	على 20
....	
على عشرون	بالحروف

الشعبة أو المسلك : .... المستوى : ....

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

....

خاص بكتابة الامتحان

سم المصحح(ة) وتوقيعه(ها) : ....

4-/ les courbes (C_0) et (C_2) :

- f_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, son tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f_0'	$-$
$f_0(x)$	$0 \searrow -2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^{-x}+1} = -2$

- f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

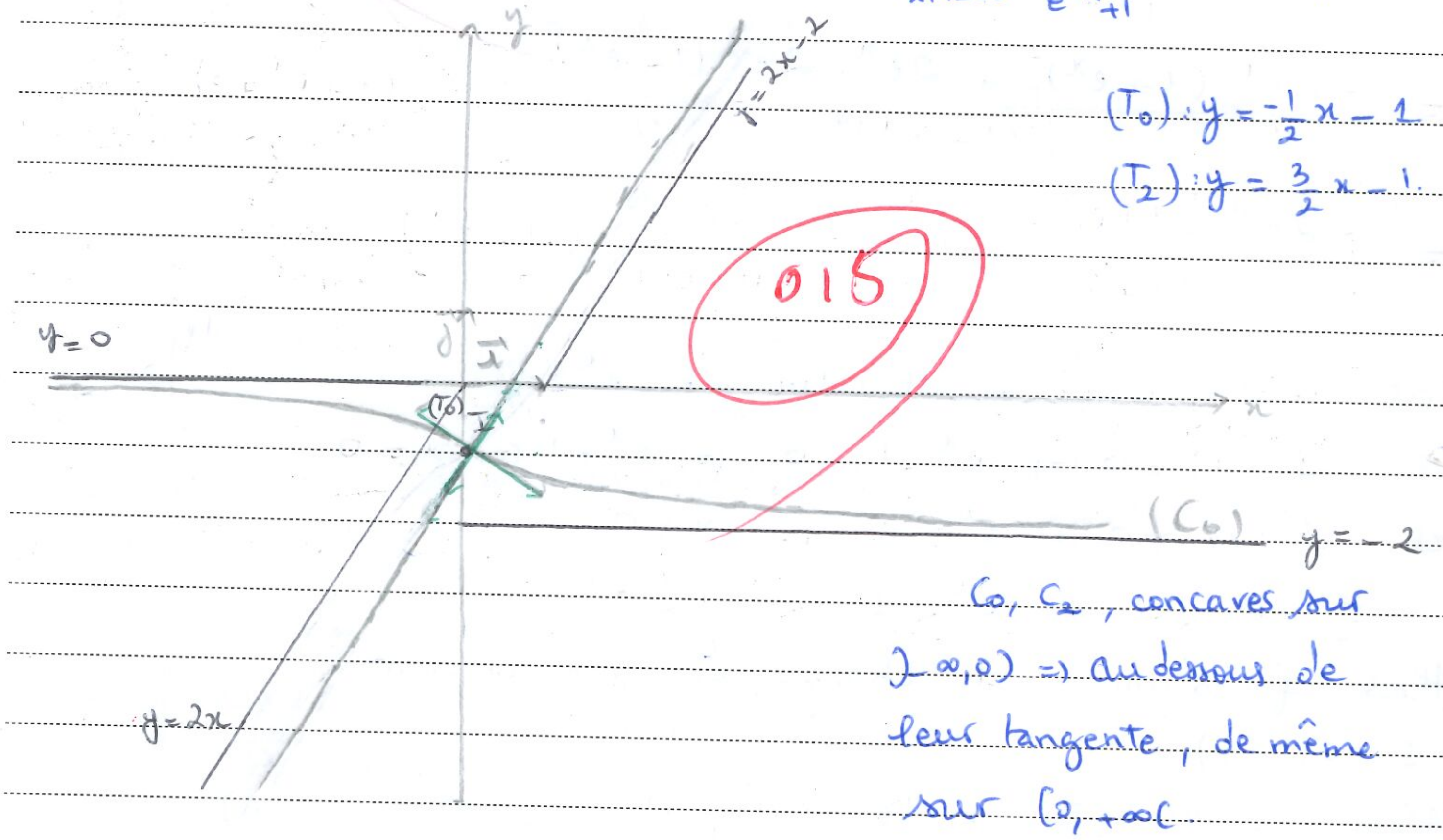
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f_2'	$+$
$f_2(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} + 2x$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} + 2x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{e^{-x}+1} + 2x = +\infty$



$(T_0) : y = -\frac{1}{2}x - 1$

$(T_2) : y = \frac{3}{2}x - 1$

015

C_0, C_2, concaves sur $]-\infty, 0)$ => au dessous de leur tangente, de même sur $(0, +\infty[$

Série ou Filière : Sc maths A Niveau : 2Bac

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION
REGION CASABLANCA - SETTAT

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : Mathématiques

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE :

5-a/ On a :

$A(t) = \int_0^t |f_n(x) - (nx-2)|\,dx$ (u.a) $(u.a = 1cm^2)$

D'après 1-a/ $f_n(x) - (nx-2) = \dfrac{2}{1+e^x} > 0$

alors

$A(t) = \int_0^t \dfrac{2}{1+e^x}dx = 2\int_0^t \dfrac{1}{1+e^x}dx = 2\int_0^t \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

$= -2\int_0^t \dfrac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}}dx = -2\left[\ln|1+e^{-x}|\right]_0^t$

$= -2(\ln|1+e^{-t}| - \ln|1+1|) = -2(\ln(1+e^{-t}) - \ln 2)\,cm^2$

0,5

b/ On a $(\forall t > 0)$; $A(t) = -2(\ln(1+e^{-t}) - \ln 2)$

$A(t) = 2(\ln 2 - \ln(1+e^{-t}))$

alors $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 2(\ln 2 - \ln(1+e^{-t})) = 2\ln 2$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} 1+e^{-t} = 1$, 0,5 ln continue

en 1 et $\ln(1) = 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln(1+e^{-t}) = 0$

Partie II :

1-a/ Soit $g_0(x) = f_0(x) - x = -\dfrac{2e^x}{1+e^x} - x$

On a,

f_0 continue (car elle est dérivable) sur $\mathbb{R}$, donc g_0 continue sur $\mathbb{R}$

et $(\forall x \in \mathbb{R})$, f_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto -x$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

alors g_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de

2 fonctions strictement décroissante.

alors g_0 est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g_0(\mathbb{R})$

et $g_0(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to+\infty} g_0(x) ; \lim_{x\to-\infty} g_0(x)\right[$

On a : $\lim_{x\to+\infty} g_0(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} - x = -\infty$.

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^{-x}+1} = -2$ $\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\right)$

et $\lim_{x\to-\infty} g_0(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} - x = +\infty$.

car $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = 0$.

0,5

D'où g_0 est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

et puisque $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $g_0(x) = 0$

càd. $f_0(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

b/ On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f_0'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$

Comme $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$ (car $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > 0$)

alors :

$(\forall x \in \mathbb{R})$, $|f_0'(x)| = -f_0'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

0,5

On a d'après I-2-b/

$(\forall x \in \mathbb{R})$, $\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$ càd $2 \cdot \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

alors $\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} \leq \frac{1}{2}$.

alors $(\forall x \in \mathbb{R})$, $|f_0'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2-a/ On a : f_0 continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[u_n, \alpha]$ (ou $[\alpha, u_n]$), et dérivable sur $]u_n, \alpha[$ (ou $]\alpha, u_n[$).

et $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|f'_0(x)| \leq \frac{1}{2}$

or $(u_n, \alpha) \in \mathbb{R}^2$

alors d'après l'inégalité des accroissement finis :

$$|f_0(u_n) - f_0(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

puisque $f_0(u_n) = u_{n+1}$

et α solution de $f_0(x) = x$, alors $f_0(\alpha) = \alpha$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0,5

b/ Montrons par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

- pour $n=0$ on a : $|u_0 - \alpha| = |0 - \alpha| = |\alpha|$

et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |\alpha| = |\alpha|$

alors $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |\alpha|$ (vrai)

- soit $n \in \mathbb{N}$:

supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |\alpha|$

0,5

On a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

Donc $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |\alpha|$

or : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |\alpha|$.

- D'où d'après le principe de récurrence :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$.

c/ On a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

D'où $\begin{cases} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha| \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha| = 0 \end{cases}$

0,5

alors $\lim_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$

D'où (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Partie III :

1-a/ On a : $(\forall n \geq 2)$:

f_n continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors

f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R})$

$f_n(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f_n(x) ; \lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right[$.

01,8

On a déjà montré que : $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

(car $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2e^x}{1+e^x} = -2$)

alors $f_n(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

et $0 \in \mathbb{R}$

alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}$.

b/ On a : $f_n(x_n) = 0$.

et on a : $f_n(0) = \frac{-2e^0}{1+e^0} + n \times 0 = \frac{-2}{2} = -1$.

et $f_n(1) = \frac{-2e}{1+e} + n = n - \frac{2e}{1+e}$

01,5

on a : $n \geq 2 > 1,47 > \frac{2e}{1+e}$

alors $n - \frac{2e}{1+e} > 0$, alors $f_n(1) > 0$

Série ou Filière : Sc. maths A Niveau : 2Bac

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : Mathématiques

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE :

Donc on a : $f_n(0) < 0 < f_n(1)$

càd : $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$

Puisque f_n est strictement croissante (pour $n \geq 2$) sur $\mathbb{R}$.

alors $0 < x_n < 1$

2_a/ On a : $(\forall n \geq 2)$;

$$f_{n+1}(x_n) = \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + (n+1)x_n = \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + nx_n + x_n$$

$$= f_n(x_n) + x_n = x_n > 0$$

Car : $\begin{cases} f_n(x_n) = 0 \\ \text{et : } x_n > 0 \end{cases}$

0,5

Alors $(\forall n \geq 2)$; $f_{n+1}(x_n) > 0$.

b_/ On a : $f_{n+1}(x_n) > 0$

et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$

alors : $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$

0,5

et puisque $(\forall n \geq 2)$, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

alors : $x_n > x_{n+1}$, càd que $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante

c_/ On a : $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et minorée par 0

0,5

alors la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente

3_a/ On a :

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

$(\forall n \geq 2)$: $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{-2e^{\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{1}{n}}} + 1$

$= \dfrac{-2e^{\frac{1}{n}} + 1 + e^{\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1-e^{\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{1}{n}}}$

on a : $n \geq 2 > 0$ donc $\frac{1}{n} > 0$

et exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

alors $e^{\frac{1}{n}} > e^{0} = 1 \Rightarrow 1 - e^{\frac{1}{n}} < 0$

et $(\forall n \geq 2)$, $1 + e^{\frac{1}{n}} > 0$

alors $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ ①

01.5

. On a :

$f_n\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)\right) = \dfrac{-2e^{\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)}}{1+e^{\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)}} + \dfrac{2e}{1+e}$

$= f_0\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)\right) - f_0(1)$

car $f_0(x) = \dfrac{-2e^{x}}{1+e^{x}}$

Puisque d'après 1_b)

$\frac{2e}{1+e} < n$ et $n > 0$ alors $\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right) < 1$

et f_0 strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

alors $f_0\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)\right) > f_0(1)$

alors $f_n\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)\right) > 0$ ②

D'après ① et ②, on a :

$f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 < f_n\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)\right) \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) < f_n(x_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\frac{2e}{1+e}\right)$

et puisque

f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

alors $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$ $(\forall n \geq 2)$

b-/ On a : $(\forall n \geq 2)$; $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$

puisque :

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right) = 0$

alors $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

0/2

. On a : $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$ et $n > 0$ alors :

$1 < n x_n < \frac{2e}{1+e}$

On a :

$f_n(x_n) = 0$, alors : $\frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + n x_n = 0$

alors : $n x_n = \frac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}}$

0/2,5

alors $\lim_{n \to +\infty} n x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}}$

puisque $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ et exp continue en 0 et $e^0 = 1$.

alors $\lim_{n \to +\infty} n x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} = \frac{2e^0}{1+e^0} = \frac{2}{2} = 1$.

4-a/ On a : $(\forall n \geq 2)$; (x_n) est strictement décroissante donc elle est majorée par son premier terme qui est x_2, alors $n \geq 2 \Rightarrow x_n \leq x_2$.

0/0,5

b-/ On a : $(\forall n \geq 2)$; $0 < x_n < 1$

et : $x_n \leq x_2$ alors $0 < x_n \leq x_2$.

la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, alors $0 < (x_n)^n \leq (x_2)^n$

et puisque $(\forall k \in \mathbb{N})$; $0 < x_k < 1$

0/1

alors : $0 < x_2 < 1$ d'où $\lim_{n \to +\infty} (x_2)^n = 0$

Ainsi : $\begin{cases} 0 \leq (x_n)^n \leq (x_2)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (x_2)^n = 0 \end{cases}$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$.

Exercice 2 : 1-a/ À la fin des feuilles. (dernière page)

1-b/ On a : $(E) : z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$

alors pour $c = a - b$

$(E) : z^2 - (a+b+a-b)z + (a-b)(a+b) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 2az + (a^2 - b^2) = 0$

pour $a = i$

$(E) : \Leftrightarrow z^2 - 2iz + (-1 - b^2) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 2iz - (1 + b^2) = 0$

$\Delta = (2i)^2 + 4(1+b^2) = -4 + 4 + 4b^2 = (2b)^2$

0,5

alors : $z_1 = \frac{2i + 2b}{2} = b + i \qquad (z_1 = a + b)$

$z_2 = \frac{2i - 2b}{2} = i - b \qquad (z_2 = c = a - b)$

Alors : $z_1 = b + i = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i5\pi/12}$

puisque $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ alors $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$

alors la forme exponentielle de z_1 est : $z_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i5\pi/12}$

. Pour $z_2 = i - b = e^{i\pi/2} - e^{i\pi/3}$

$= e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\pi/12}\right) = 2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{11\pi}{12}}$

Série ou Filière : Sc maths A Niveau : 2Bac

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : Mathématiques

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE :

et puisque $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ alors $2\sin(\frac{\pi}{12}) > 0$

Donc la forme exponentielle de z est $z = 2\sin(\frac{\pi}{12})\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

2- a/ Soit R_1 la rotation de centre $P(p)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

$R_1(B) = A(a) \iff a - p = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - p)$

$\iff a - p = i(b - p)$

$\iff a - p = ib - ip$ 0,5

$\iff p(-1 + i) = ib - a$

$\iff p(-1+i)(-1-i) = (ib - a)(-1-i)$ (*)

Puisque $(-1+i)(-1-i) = (-1+i)(\overline{-1+i}) = |-1+i|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

alors (*) $\iff 2p = -ib + b + a + ia$

$\iff 2p = (b + a) + (a - b)i$

Soit R_2 la rotation de centre $Q(q)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$;

$R_2(C) = A \iff a - q = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c - q)$

$\iff a - q = -i(c - q)$

$\iff a - q = -ic + iq$ 0,5

$\iff q(-1 - i) = -ic - a$

$\iff q(1 + i) = ic + a$

$\iff q(1+i)(1-i) = (ic + a)(1 - i)$

$\iff q\,|1+i|^2 = ic + c + a - ia$

$\iff 2q = c + a + (c - a)i$

b/ Puisque $D(d)$ est le milieu de $[BC]$

alors : $d = \frac{b + c}{2}$

alors :

$$\frac{p-d}{q-d} = \frac{p-\frac{b+c}{2}}{q-\frac{b+c}{2}} = \frac{2p-(b+c)}{2q-(b+c)}$$

$$= \frac{b+a+(a-b)i-b-c}{c+a+(c-a)i-b-c} = \frac{a-c+(a-b)i}{a-b+(c-a)i}$$

$$= \frac{a-c+ai-ib}{a-b+ic-ia} = \frac{a(1+i)-(c+ib)}{a(1-i)-(-ic+b)}$$

$$= \frac{i\left[a(-i+1)-(-ic+b)\right]}{a(1-i)-(-ic+b)} = i$$

0,5

c/ On a : $\frac{p-d}{q-d} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

alors $\left|\frac{p-d}{q-d}\right| = |e^{i\frac{\pi}{2}}| = 1 \Rightarrow PD = QD$

Donc PDQ est isocèle en D (1)

et : $\frac{p-d}{q-d} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow (\overrightarrow{DQ}, \overrightarrow{DP}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

$\Rightarrow (PD) \perp (DQ)$

$\Rightarrow$ PDQ rectangle en D (2)

0,5

D'après (1) et (2), PDQ est rectangle isocèle en D.

3-/ Soient : e et f les affixes des points E et F respectivement.

- E symétrique de B par rapport à P, alors P est le milieu de [EB]

alors $p = \frac{e+b}{2} \Rightarrow e = 2p - b$.

- F le symétrique de C par rapport à Q, alors Q est le milieu de [FC]

alors $q = \frac{c+f}{2} \Rightarrow f = 2q - c$.

- Puisque K est le milieu de [EF]

alors :

$$K = \frac{e+f}{2} = \frac{2p-b+2q-c}{2}$$

$$= \frac{b+a+(a-b)i-b+c+a+(c-a)i-c}{2}$$

0,5

$$= \frac{2a+i(a-b+c-a)}{2} = a + \frac{i}{2}(c-b).$$

b/ On a : $\frac{p-d}{q-d} = i \notin \mathbb{R}$.

alors P, Q, D ne sont pas alignés. (1)

et on a :

$$\frac{p-d}{q-d} \times \frac{q-K}{p-K} = \frac{p-d}{q-d} \times \frac{2q-2K}{2p-2K}$$

$$= i \times \frac{c+a+(c-a)i-2a-i(c-b)}{b+a+(a-b)i-2a-i(c-b)}$$

0,5

$$= i \times \frac{c-a+i(c-a-c+b)}{b-a+i(a-b-c+b)}$$

$$= i \times \frac{c-a+i(b-a)}{b-a+i(a-c)} = \frac{i(c-a)-(b-a)}{(b-a)-i(c-a)} = -1 \in \mathbb{R}$$ (2)

De (1) et (2), on déduit que K, P, Q, D sont cocycliques.

Exercice 3.

Partie I.

1-/ On a : $47 \times 11 - 43 \times 12 = 487 - 486 = 1$.

alors (11, 12) est une ~~solution~~ particulière de (E).

0,25

2-/ On a : $\begin{cases} 47x - 43y = 1 \\ 47 \times (11) - 43 \times (12) = 1. \end{cases}$

الشعـبة أو المسلك : .... المستوى ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مـادة : ....

خاص بكتابة الإمتحان

النقطة النهائية	على 20
....	بالحروف

التقدير المفسر للنقطة

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

Par différence, on obtient:

$47(x-11)-43(y-12)=0$

càd $47(x-11)=43(y-12)$ (o)

alors $43/47(x-11)$ (*)

. On a: les nombres premiers inférieurs ou égal à $\sqrt{43}$ et à $\sqrt{47}$ sont 2, 3, 5 et ne divisent pas 43 et 47

alors 43 et 47 premiers et $43 \neq 47$

alors $43 \wedge 47 = 1$

Donc d'après Gauss: (*) $\Rightarrow 43/x-11$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x-11=43k$ (**)

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x=43k+11$

On remplace (**) dans (o), on obtient

$47 \times 43k = 43(y-12)$

$\Rightarrow 47k = y-12 \Rightarrow y = 47k+12$

Réciproquement: si $x=43k+11$ et $y=47k+12$

on a $47x-43y = 47(43k+11)-43(47k+12)$

$= 47\times 43k + 47\times 11 - 43\times 47k - 43\times 12$

$= 47\times 11 - 43\times 12 = 1$

Donc $S = \{(11+43k\ ;\ 12+47k),\ k\in\mathbb{Z}\}$

0,75

Partie II

1 - a/ Supposons que x et 43 ne sont pas premiers entre eux, et 43 premier, alors

$43/x \Rightarrow x \equiv 0\ (43)$

$\Rightarrow x^{41} \equiv 0\ (43)$ et on a $x^{41} \equiv 4\ (43)$

$\Rightarrow 4 \equiv 0\ (43) \Rightarrow 43/4$ (faux)

0,25

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADEMIE REGIONALE
D'EDUCATION ET DE FORMATION
REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : Sc. math A Niveau : 2Bac

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : Mathématiques

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE :

Donc $x \wedge 43 = 1$

. On a: $\begin{cases} x \wedge 43 = 1 \\ 43 \text{ premier} \end{cases}$

Donc d'après Fermat: $x^{43-1} \equiv 1 (43)$ 0,25

càd: $x^{42} \equiv 1 (43)$.

b-/ On a: $x^{41} \equiv 4 (43)$

alors $x \times x^{41} \equiv 4x (43)$

alors $x^{42} \equiv 4x (43)$

et puisque $x^{42} \equiv 1 (43)$ 0,25

alors $4x \equiv 1 (43)$

. On a: $4x \equiv 1 (43)$ 0,25

Donc $11 \times 4x \equiv 11 (43) \Rightarrow 44x \equiv 11 (43)$

$\Rightarrow 43x + x \equiv 11 (43)$

Or $43x \equiv 0 (43)$ donc $x \equiv 11 (43)$

2-/ On a d'après 1/

x solution de (F) $\Rightarrow x \equiv 11 (43)$

Montrons l'équivalence:

→ Si $x \equiv 11 (43)$ on a: $x^{41} \equiv 11^{41} (43)$ (1)

On a: $11 \wedge 43 = 1$ et 43 premier

D'après Fermat: $11^{42} \equiv 1 (43)$

Donc: $11 \times 11^{41} \equiv 1 (43)$ 0,5

D'où $44 \times 11^{41} \equiv 4 (43)$

et puisque $44 \equiv 1 (43)$ alors $11^{41} \equiv 4 (43)$ (2)

On remplace (2) dans (1) par la transitivité de la congruence

On obtient: $x^{41} \equiv 4 (43)$ alors x solution de (F)

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

Donc : x solution de (F) $\Leftrightarrow x \equiv 11 \, [43]$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ x = 43k + 11$.

Donc $S_F = \{11 + 43k \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Partie III.

1-a/ On a x solution de (S)

alors $\begin{cases} x^{41} \equiv 4 \, (43) & (i) \\ x^{47} \equiv 10 \, (47) & (ii) \end{cases}$

Pour (i), on a : d'après la partie II :

$x^{41} \equiv 4 \, (43) \Leftrightarrow x \equiv 11 \, (43)$. (1)

Pour (ii) ; supposons que x et 47 ne sont pas premiers entre eux, et 47 premier, alors $47 / x$

càd : $x \equiv 0 \, (47) \Rightarrow x^{47} \equiv 0 \, (47)$

$\Rightarrow 10 \equiv 0 \, (47)$ (faux)

Donc $\begin{cases} x \wedge 47 = 1. \\ 47 \text{ premier} \end{cases}$ D'après Fermat, on a : $x^{46} \equiv 1 \, (47)$

alors $x \times x^{46} \equiv x \, (47) \Rightarrow x^{47} \equiv x \, (47)$ 0,5

et $x^{47} \equiv 10 \, (47)$ donc $x \equiv 10 \, (47)$ (2)

D'après (1) et (2), si x solution de (S), alors

x solution de (S') : $\begin{cases} x \equiv 11 \, (43) \\ x \equiv 10 \, (47). \end{cases}$

b/ On a : $\begin{cases} x \equiv 11 \, (43) \\ x \equiv 10 \, (47) \end{cases}$

alors $\exists (m, p) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ \begin{cases} x = 43m + 11 \\ x = 47p + 10 \end{cases}$

alors $43m + 11 = 47p + 10$.

Donc $43m - 47p = -1$

$\Rightarrow 47p - 43m = 1$.

$\Rightarrow (p, m)$ solution de (E)

alors : $\begin{cases} p = 11 + 43k \\ m = 12 + 47k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$ 0,5

alors $x = 43m + 11 = 43(12 + 47k) + 11$

$= 2021k + 43 \times 12 + 11 = 2021k + 527$

alors $x \equiv 527\ (2021)$.

2-) On a si x solution de (S) alors $x \equiv 527\ (2021)$.

Montrons l'équivalence.

On a si $x \equiv 527\ (2021)$

alors $2021 / x - 527$

et puisque $43 / 2021$ et $47/2021$

alors $\begin{cases} 43 / x - 527 \\ 47 / x - 527 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x \equiv 527\ (43) \\ x \equiv 527\ (47) \end{cases}$

Comme $527 \equiv 11\ (43)$ et $527 \equiv 40\ (47)$

car $527 = 47 \times 11 + 10$

Donc $\begin{cases} x \equiv 11\ (43) & (i) \\ x \equiv 10\ (47) & (ii) \end{cases}$ 0,5

Pour (i), on a d'après Partie II,

$x \equiv 11\ (43) \Rightarrow x^{47} \equiv 4\ (43)$

Pour (ii), on a: $x^{47} \equiv 10^{47}\ (47)$

puisque $10 \wedge 47 = 1$ (car 47 premier et $47 \nmid 10$)

et 47 premier, alors d'après Fermat,

$10^{46} \equiv 1\ (47)$ alors $10^{47} \equiv 10\ (47)$

Par transitivité on aura: $x^{47} \equiv 10\ (47)$

Donc x sol de (S) $\Leftrightarrow x \equiv 527\ (2021)$

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}),\ x = 2021k + 527$.

Alors l'ensemble G des solution de (S) est :

$G = \{2021k + 527,\ k \in \mathbb{Z}\}$. (suite complexe)

الشـعـبة أو المسلك : .... المستوى ....

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

امتحان نيل شهادة البكالوريا

النقطة النهائية	على 20	
....	بالحروف	

مـادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

Suite : (Complexe) : exercice 2 :

1 - a) $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 4ac - 4bc$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$= (a + b - c)^2$

donc $z_1 = \dfrac{a+b+c+a+b-c}{2} = a+b.$

$z_2 = \dfrac{a+b+c-a-b+c}{2} = c.$

0,5