ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DU PRÉSCOLAIRE ET DES SPORTS

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Série / Option :

COMPOSITION DE : MAT

RESERVE ACADEMIE

108055

Nom du correcteur et signature :

Note Globale	
En chiffres	En lettre
20,00	
Appréciation de la note chiffré	
20	

Exercice 1 :

① a- on a $\overrightarrow{AB}(1;1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} = (1-(0))\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (0+1)\vec{k}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}}$ 0,5

b- on a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ vecteur normal au plan (ABC) tel que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;0;1)$ et $A(0;1;1)\in(AB$

Donc une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$1(x-0)+0(y-1)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{x+z-1=0}$ 0,25

② on a (S) de centre $\Omega(1;1;2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

une équation cartésienne de la sphère (S) est :

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\sqrt{2}^2$ 0,5

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-4z+4=2$

$\Leftrightarrow \boxed{(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0}$

③ $d(\Omega;(ABC)) = \dfrac{|x_\Omega+z_\Omega-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|1+2-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

on a $d(\Omega;(ABC)) = R$ Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

Vérifions que le point d'intersection est A, càd que $A\in(ABC)$ et $A\in(S)$ 0,5

$x_A+z_A-1 = 0+1-1 = 0$ Donc $A\in(ABC)$

④ a- on a (Δ) perpendiculaire à (ABC), donc le vecteur normal à (ABC) est un vecteur directeur de (Δ) tel que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;0;1)$. Et on a $C\in(\Delta)$ tel que $C(-1;1;2)$

Donc une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$(\Delta):\begin{cases}x=x_C+t\\ y=y_C+0t\\ z=z_C+t\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{(\Delta):\begin{cases}x=-1+t\\ y=1\\ z=2+t\end{cases}}$$

0,25

④ b- on a $d(\Omega;(\Delta))=\dfrac{\|\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ (on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$)

on a $\overrightarrow{C\Omega}(2;0;0)$ et $\vec{u}(1;0;1)$

donc $\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{j}$

Donc $\|\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{(-2)^2}=2$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

D'où $d(\Omega;(\Delta))=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ on a $\boxed{d(\Omega;(\Delta))=R}$

Donc (Δ) est tangente à la sphère (S)

on a $D\in(\Delta)$ et $D\in(S)$, on résoud le système suivant :

$$\begin{cases}(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2\\ (\Delta):\begin{cases}x=-1+t\\ y=1\\ z=2+t\end{cases}\end{cases}$$

$(-1+t-1)^2+(1-1)^2+(2+t-2)^2=2$

$\Leftrightarrow t^2-4t+4+t^2=2 \Leftrightarrow 2t^2-4t+2=0$

$\Leftrightarrow t^2-2t+1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1.$

OK

Donc $\begin{cases}x_D=-1+1=0\\ y_D=1\\ z_D=2+1=3\end{cases}$ Donc $\boxed{D(0;1;3)}$ point d'intersection entre (Δ) et (S)

c- on a $\vec{i}+\vec{k}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ tel que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;0;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$

Donc $\overrightarrow{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k})=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=-1+0+1=0$ Donc $\overrightarrow{AC}\perp\vec{u}$ (tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$)

càd $(\overrightarrow{AC};\vec{u})=\dfrac{\pi}{2}$

Don $\overrightarrow{AC}\wedge\vec{u}$ ... $\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ... $\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|\vec{u}\|$

Exercice 2 :

1) $t(B) = D \Leftrightarrow d = b + z_{\overrightarrow{OA}}$

$\Leftrightarrow d = b + a$

$\Rightarrow d = -1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{d = -2}$

0,1

2) $R(B) = C \Rightarrow c - d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(b-d)$

$\Leftrightarrow c = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(b-d) + d$

$\Rightarrow c = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 + i\sqrt{3} + 2) - 2i$

$\Leftrightarrow c = \left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i\sqrt{3}) - 2$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2} - 2$

$\Rightarrow c = -2 - 2 \Leftrightarrow \boxed{c = -4}$

0,1

3) a- $\frac{b-c}{a-c} = \frac{-1+i\sqrt{3}+4}{-1-i\sqrt{3}+4} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{(3+i\sqrt{3})^2}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})} = \frac{9+6\sqrt{3}i-3}{9+3}$

$\Leftrightarrow \frac{b-c}{a-c} = \frac{6+6\sqrt{3}i}{12} = \frac{6(1+\sqrt{3}i)}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

on a $\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

Donc $\boxed{\frac{b-c}{a-c} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

b- on a $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

et on a $\frac{c-d}{b-d} = \frac{-4+2}{-1+i\sqrt{3}+2} = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-2(1-i\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}$

0,1

$\Rightarrow \frac{c-d}{b-d} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

on déduit que $\boxed{\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}}$

4) a) on a $|z+2| = 2 \Leftrightarrow |z-(-2)| = 2 \Leftrightarrow |z-d| = 2 \Leftrightarrow DM = 2$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow DM = 2$ D'où $\boxed{|z+2| = 2}$

0,25

4) b) on pose $z = x+iy$ et $\bar{z} = x - iy$ Donc $z + \bar{z} = 2x$

on a $|z| = 4 \Leftrightarrow |x+iy| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 16$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

امتحان شهادة البكالوريا

النقطة الإجمالية	
بالأرقام	بالحروف
التقدير المفسر للنقطة	

خاص بالأكاديمية

الشعبة /المسلك : ....

مادة : ....

اسم المصحح وتوقيعه (ها) : ....

et on a $|z+2| = 2 \Leftrightarrow |x+iy+2| = 2 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = -x^2-4x$

$\begin{cases} y^2 = -x^2-4x \\ y^2 = 16-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow -x^2-4x = 16-x^2 \Leftrightarrow -4x = 16$

$\Rightarrow x = -4$

Donc $\boxed{z+\overline{z} = -8}$

0,75

c) on a $z+\overline{z} = -8 \Rightarrow x+iy+x-iy = -8 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$

on a $|z+2| = 2 \Leftrightarrow |x+iy+2| = 2 \Leftrightarrow |-4+2+iy| = 2$

$\Rightarrow \sqrt{(-2)^2+y^2} = 2 \Leftrightarrow y^2+4 = 4 \Leftrightarrow y = 0$

0,75

Donc (Γ) et (Γ') se coupent au point C d'affixe $\boxed{c = -4}$

Exercice 3 :

1) on effectue un tirage simultané de 3 boules de l'urne.
Il s'agit d'une combinaison de 3 boules parmi 10.
Le nombre tirages possibles : $\text{Card}\,\Omega = C_{10}^3 = 120$

Événement A : on desire n'obtenir aucune boule rouge, càd on tire 3 boules non-rouges parmi 6 dans l'urne

$\text{Card} A = C_6^3 = 20$ Donc $p(A) = \dfrac{\text{Card} A}{\text{Card}\,\Omega} = \dfrac{20}{120} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

0,75

2) Événement B : on veut obtenir 3 boules blanches ou trois vertes, càd on tire 3 boules vertes parmi 3, ou on tire ~~3~~ boules blanches parmi 3

$\text{Card} B = C_3^3 + C_3^3 = 2$ Donc $p(B) = \dfrac{\text{Card} B}{\text{Card}\,\Omega} \Leftrightarrow p(B) = \dfrac{2}{120} = \boxed{\dfrac{1}{60}}$

0,75

3) Événement C : on désire obtenir exactement une boule rouge, càd on tire 1 boule rouge parmi 4, et deux boules non-rouges parmi 6

$\text{Card} C = C_4^1 \times C_6^2 = 60$ Donc $p(C) = \dfrac{\text{Card} C}{} \Leftrightarrow p(C) = \dfrac{60}{} = \dfrac{1}{}$

0,75

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DU PRÉSCOLAIRE ET DES SPORTS

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Série / Option : ....

COMPOSITION DE : ....

Note Globale	
En chiffres	En lettres
Appréciation de la note chiffrée	

RESERVE ACADEMIE

108055

Nom du correcteur et signature : ....

Exercice 3 (Suite)

④ Événement D : on veut tirer au moins deux boules rouges, càd on tire 2 boules rouges parmi 4 et 1 boule non-rouge parmi 6, ou trois boules rouges parmi 4.

$$\text{Card } D = C_4^2 \times C_6^1 + C_4^3 = 40$$

$$p(D) = \frac{\text{Card } D}{\text{Card } \Omega} = \frac{40}{120} \Rightarrow \boxed{p(D) = \frac{1}{3}}$$

0,75

Exercice 4 :

① a- on a $x \mapsto xe^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$

et $(xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1) = \boxed{h(x)}$

D'où $x \mapsto xe^x$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

$$I = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)e^x\,dx = \left[xe^x\right]_{-1}^{0} = 0e^0 - (-1)e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$$

0,75

① b- on pose $\begin{cases} u = (x+1)^2 \\ v' = e^x \end{cases}$ et $\begin{cases} u' = 2(x+1) \\ v = e^x \end{cases}$

Donc $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x\,dx = \left[e^x(x+1)^2\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2(x+1)e^x\,dx$

$\Leftrightarrow J = 1 - 2\int_{-1}^{0} (x+1)e^x\,dx \Rightarrow J = 1 - 2I$

$\Rightarrow J = 1 - \frac{2}{e} = \boxed{\frac{e-2}{e}}$

0,75

② a- on a $(E) : y'' - 2y' + y = 0$

on résoud l'équation caractéristique de (E) telle que : $r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0$

Donc $y = (\alpha x + \beta)e^x$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ O.K

b) $h(0) = 1 \Leftrightarrow \beta e^0 = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$

$h'(x) = y' = \alpha e^x + e^x(\alpha x + \beta) = e^x(\alpha + \alpha x + \beta)$

$h'(0) = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2 - \beta$

$\Rightarrow \alpha = 2 - 1 \Rightarrow \alpha = 1$

Donc la solution de (E) sera (E) $\boxed{y(x) = (x+1)e^x = h(x)}$ O.K

Donc h est la solution de (E).

Problème :

① $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x(e^{x/2} - 1)^2 = +\infty$ (car $\lim\limits_{+\infty} e^{x/2} = \lim\limits_{+\infty} x = +\infty$)

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} x(e^{x/2} - 1)^2 = -\infty$ (car $\lim\limits_{-\infty} e^{x/2} = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} x = -\infty$) O.K

② $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} (e^{x/2} - 1)^2 = +\infty$ (car $\lim\limits_{+\infty} e^{x/2} = +\infty$) O.K

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage

③ a- $\lim\limits_{-\infty} f(x) - y = \lim\limits_{-\infty} x(e^{x/2} - 1)^2 - x = \lim\limits_{-\infty} x((e^{x/2} - 1)^2 - 1)$

$= \lim\limits_{-\infty} x((e^{x/2} - 1 - 1)(e^{x/2} - 1 + 1)) = \lim\limits_{-\infty} x(e^{x/2}(e^{x/2} - 2))$

$= \lim\limits_{-\infty} x(e^x - 2e^{x/2}) = \lim\limits_{-\infty} xe^x - 4\frac{x}{2}e^{x/2} = 0$

(car $\lim\limits_{-\infty} xe^x = \lim\limits_{-\infty} \frac{x}{2}e^{x/2} = 0$) O.K

Donc (C_f) admet une asymptote (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$.

b- Soit $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) - x = x(e^{x/2} - 1)^2 - x = x((e^{x/2} - 1)^2 - 1) = x((e^{x/2} - 2)e^{x/2})$

$\Rightarrow f(x) - x = x(e^x - 2e^{x/2})$

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x(e^x - 2e^{x/2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^x - 2e^{x/2} = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $e^x = 2e^{x/2} \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{x/2} = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\frac{x}{2} = \ln 2$

Dressons le tableau de signe de $f(x)-x$.

x	$-\infty$		0		$2\ln 2$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x-2e^{x/2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,75

$\forall x\in\,]-\infty;0]\cup[2\ln 2;+\infty[\,;\ f(x)\geq x$. Donc (C_f) est au dessus de (Δ) sur $]-\infty;0]$ et $[2\ln 2;+\infty[$

$\forall x\in[0;2\ln 2]$; $f(x)\leq x$. Donc (C_f) est au dessous de (Δ) sur $[0;2\ln 2]$

④ a- $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=x'(e^{x/2}-1)^2+((e^{x/2}-1)^2)'x$

$\Rightarrow f'(x)=(e^{x/2}-1)^2+\cancel{2}x(e^{x/2}-1)\times\frac{1}{\cancel{2}}e^{x/2}$

$\Rightarrow f'(x)=(e^{x/2}-1)^2+xe^{x/2}(e^{x/2}-1)$

0,5

b- on a $x(e^{x/2}-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $e^{x/2}=1 \Rightarrow x=0$ ou $\frac{x}{2}=0$

$\Leftrightarrow x=0$

$\forall x\in\,]-\infty;0]$; $x\leq 0$ et $\frac{x}{2}\leq 0 \Leftrightarrow e^{x/2}\leq 1 \Rightarrow e^{x/2}-1\leq 0$

Donc $x(e^{x/2}-1)\geq 0$

$\forall x\in[0;+\infty[$; $x\geq 0$ et $\frac{x}{2}\geq 0 \Rightarrow e^{x/2}\geq 1 \Leftrightarrow e^{x/2}-1\geq 0$

Donc $x(e^{x/2}-1)\geq 0$

D'où $\forall x\in\mathbb{R}$, $x(e^{x/2}-1)\geq 0$

0,5

on a $\forall x\in\mathbb{R}$ $(e^{x/2}-1)^2\geq 0$ et $xe^{x/2}(e^{x/2}-1)\geq 0$ (car $e^{x/2}>0$)

Donc $(e^{x/2}-1)^2+xe^{x/2}(e^{x/2}-1)\geq 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x)\geq 0}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

c-

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

امتحان شهادة البكالوريا

النقطة الإجمالية	
بالأرقام	بالحروف
التقدير المفسر للنقطة	

خاص بالأكاديمية

الشعبة/المسلك : ....

مادة : ....

اسم المصحح وتوقيعه (ها) : ....

⑤a- $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=(f'(x))'=2(e^{x/2}-1)\frac{1}{2}e^{x/2}+(e^{x/2}+\frac{x}{2}e^{x/2})(e^{x/2}-1)$

$+\frac{1}{2}e^{x/2}(xe^{x/2})$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}\left(2e^{x/2}-2+xe^{x/2}-x+\frac{2}{e^{x/2}}e^{x}-\frac{2}{e^{x/2}}e^{x/2}+\frac{x}{2}e^{x}\times\frac{2}{e^{x/2}}\right)$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}(2e^{x/2}+xe^{x/2}+2e^{x/2}-2-2-x+xe^{x/2})$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}(4e^{x/2}+2xe^{x/2}-x-4)$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}(e^{x/2}(2x+4)-x-4)$

$\Rightarrow \boxed{f''(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}g(x)}$

0,5

⑤b- D'après la courbe, on a

$\forall x\in]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$: $g(x)\geq 0$ car $(\mathcal{C}_g)$ au dessus de l'axe des abscisses.

$\forall x\in[\alpha;0]$: $g(x)\leq 0$ car $(\mathcal{C}_g)$ au dessous de l'axe des abscisses.

0,5

⑤c- on a $\forall x\in\mathbb{R};\ \frac{1}{2}e^{x/2}>0$ Donc le signe de $f''(x)$ est celui de $g(x)$

Donc $\forall x\in]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$: $f''(x)\geq 0$ Donc $(\mathcal{C}_f)$ convexe sur $]-\infty;\alpha]$ et $[0;+\infty[$

$\forall x\in[\alpha;0]$: $f''(x)\leq 0$: Donc $(\mathcal{C}_f)$ concave sur $[\alpha;0]$

on a $f''(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$ on remarque que $(\mathcal{C}_g)$ coupe l'axe des abscisses en α et 0

Donc $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\alpha$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet deux pt d'inflexion en $(\alpha; f(\alpha))$ et $(0; f(0))$

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DU PRÉSCOLAIRE ET DES SPORTS

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Série / Option : ....

COMPOSITION DE : ....

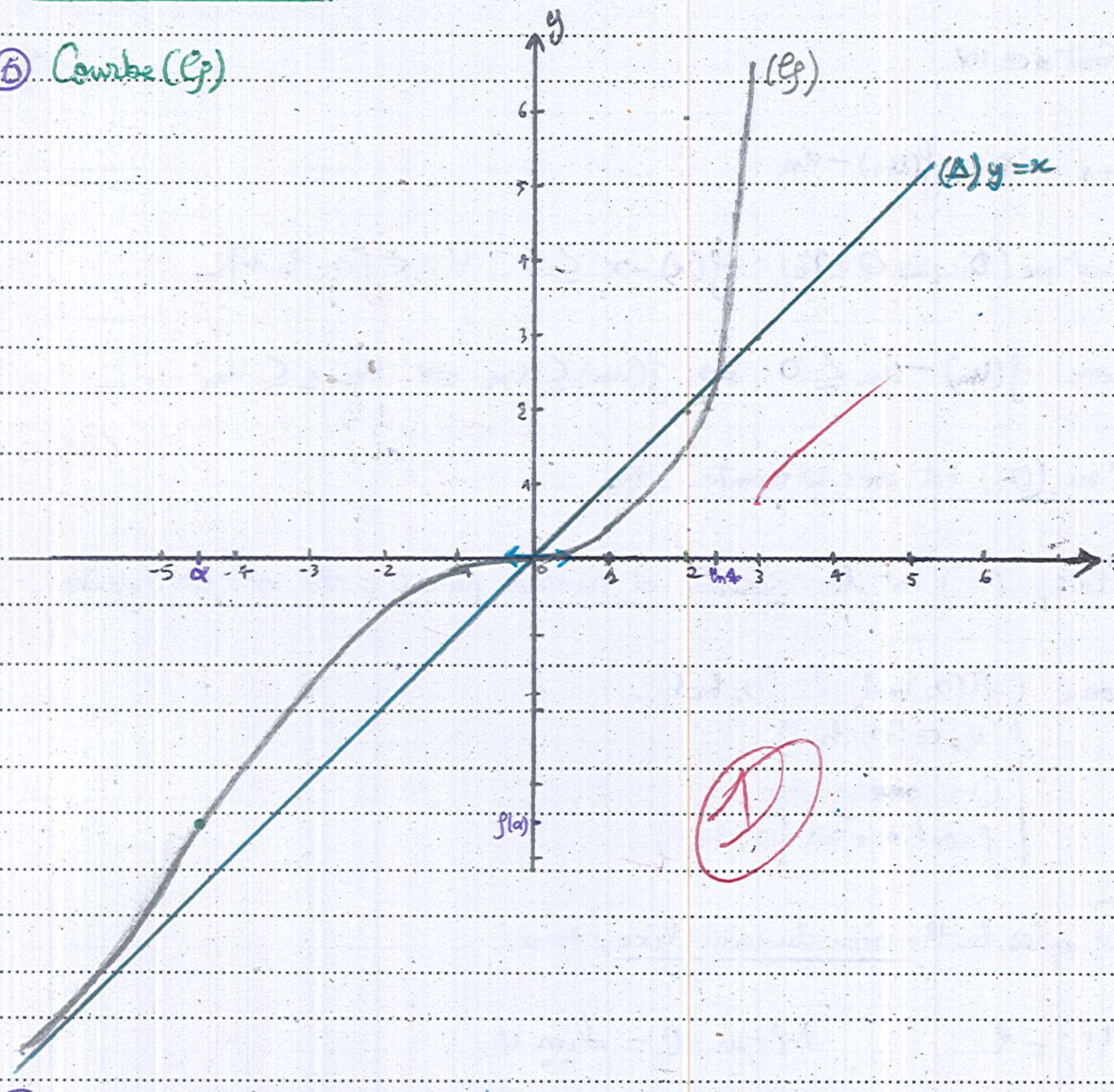
Note Globale	
En chiffres	En lettres
Appréciation de la note chiffrée	

RESERVE ACADEMIE
108055

Nom du correcteur et signature : ....

Problème (Suite)

⑥ Courbe (C_f)



1

⑦ a- on a f continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

D'où f admet une fct réciproque f^{-1} définie sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

0,5

b- on a f dérivable en $\ln 4$ et $f'(\ln 4) = 1 + \ln 16 \neq 0$

Donc f^{-1} est dérivable en $f(\ln 4) = \ln 4$ et $(f^{-1})'(\ln 4) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\ln 4))}$

$\Rightarrow (f^{-1})' \ln 4 = \dfrac{1}{f'(\ln 4)} = \boxed{\dfrac{1}{1 + \ln 16}}$

③ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ⓐ Pour $n=0$; $0 < u_0 < \ln 4$ P.V car $u_0 = 1$.

Supposons que $0 < u_n < \ln 4$ et montrons que $0 < u_{n+1} < \ln 4$

on a $0 < u_n < \ln 4 \Rightarrow f(0) < f(u_n) < f(\ln 4)$ (car f croissante sur $]0, \ln 4[$)

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \ln 4$

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$. $\boxed{0 < u_n < \ln 4}$

0,5

ⓑ Soit $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

on sait que (D'après Q.3) b)) $f(x) - x \leq 0$ $\forall x \in]0, \ln 4[$

Donc $f(u_n) - u_n \leq 0 \Rightarrow f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$

D'où (u_n) est décroissante.

0,5

ⓒ Puisque (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; elle est convergente.

0,25

ⓓ on a $\begin{cases} f(]0, \ln 4[) \subset]0, \ln 4[\\ u_0 \in]0, \ln 4[\\ (u_n) \text{ convergente} \\ f \text{ continue sur }]0, \ln 4[\end{cases}$

D'après le théorème du point fixe, on a

$f(\ell) = \ell$ tel que $\ell = \lim\limits_{+\infty} u_n$

$\Leftrightarrow \ell(e^{\ell/2} - 1)^2 - \ell = 0 \Leftrightarrow \ell\left(e^{\ell/2}(e^{\ell/2} - 2)\right) = 0$

$\Rightarrow \ell = 0$ ou $e^{\ell} - 2e^{\ell/2} = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = \ln 4$

Puisque (u_n) est décroissante, alors elle est majorée par son premier terme

c.à.d $u_n \leq 1$ Puisque $\ln 4 \approx 1,4 > 1$