Rely 2496

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : 2 BAC Série ou Filière : S.T.E Session : Normal

Matière : MATHs

Appréciations expliquant la note chiffrée :

Note définitive sur 20: 19,75

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

524581

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ELOTMANI

Exercice 1 :

1. a) on a $\vec{AB}(x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A)$

$\vec{AB}(1-0, 2-1, 0-1)$

$\vec{AB}(1, 1, -1)$

et $\vec{AC}(x_C - x_A , y_C - y_A , z_C - z_A)$

$\vec{AC}(-1-0, 1-1, 2-1)$

$\vec{AC}(-1, 0, 1)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \vec{i} \\ 1 & 0 & \vec{j} \\ -1 & 1 & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (1-0)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (0-(-1))\vec{k}$$

$$= 1\vec{i} + 1\vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{k}$$

donc $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

b) on a $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC)

donc l'equation cartésienne s'écrit sous forme :

$x + z + d = 0$

déterminons d :

soit $A(0,1,1) \in (ABC) \iff x_A + z_A + d = 0$

$\iff 0 + 1 + d = 0$

$\iff d = -1$.

donc $x + z - 1 = 0$ est l'equation cartésienne du plan

0,75

(ABC)

2) on a le centre $\Omega(1,1,2)$ et $R=\sqrt{2}$

(S) : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+\cancel{1}+y^2-2y+\cancel{1}+z^2-4z+4=\cancel{2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0$

(S) : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0$

0,5

3) déterminons la distance ΩA.

$\vec{\Omega A}(x_A-x_\Omega, y_A-y_\Omega, z_A-z_\Omega)$

$\vec{\Omega A}(0-1, 1-1, 1-2)$

$\vec{\Omega A}(-1, 0, -1)$

$\Omega A = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2} = R$

0,25

on a $\Omega A = R$

donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

4)

a) soit $C \in (D)$ et la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABC) donc elle est colinéaire avec le vecteur normal donc le vecteur directeur est $\vec{u}(1,0,1)$

donc une présentation paramétrique de la droite (D)

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1 \\ z = 2+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

0,25

b) on a la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABC) et le plan (ABC) est tangente à la sphère (S) donc la droite (D) est tangente à la sphère (S).

on a la droite (D) est tangente à la sphère (S) en un point D.

donc $(D) \in (D)$ et $D \in (S)$

$$\begin{cases} x_d = -1 + t \\ y_d = 1 \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z_d = 2 + t \\ (x_d - 1)^2 + (y_d - 1)^2 + (z_d - 2)^2 = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (-1 + t - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (2 + t - 2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow (t - 2)^2 + 0 + t^2 = 2$

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 + t^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 4t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$

donc $\begin{cases} x_d = 0 \\ y_d = 1 \\ z_d = 3 \end{cases}$ $\quad D(0, 1, 3)$

0,5.

c) on a $\vec{AC}(-1, 0, 1)$ et $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = \vec{i} + \vec{k} = (1, 0, 1)$

donc $\vec{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k}) = -1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1$

$= -1 + 0 + 1$

$= 0$

on a $d(A, (D)) = \dfrac{\| \vec{AC} \wedge (\vec{i} + \vec{k}) \|}{\| \vec{i} + \vec{k} \|}$

$\vec{AC} \wedge (\vec{i} + \vec{k}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \vec{i} \\ 0 & 0 & \vec{j} \\ 1 & 1 & \vec{k} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$

$= -(-1 - 1)\vec{j} + 0\vec{k}$

$= 2\vec{j}$

$\| \vec{AC} \wedge (\vec{i} + \vec{k}) \| = \sqrt{2^2} = 2$

et $\| \vec{i} + \vec{k} \| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2^2} = 2$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

امتحانات نيل شهادة البكالوريا

المستوى : .... الشعبة أو المسلك : .... دورة : ....

خاص بكتابة الامتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة ....

النقطة النهائية	على 20
....	بالحروف

donc $d(A,(\Delta)) = \frac{2}{2} = 1$

Exercice 2 :

1) $t_{\vec{OA}}(B) = D \iff \vec{OA} = \vec{BD}$

$\iff Z_{\vec{OA}} = Z_{\vec{BD}}$

$\iff a - 0 = d - b$

$\iff d = a + b$

$\iff d = -1 - i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}$

$\iff d = -2$

donc $d = -2$ donc D image de B par t.

2) on a $R(D, \frac{2\pi}{3})$

on a $z' - d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - d)$

$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $d = -2$

$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $z' = d + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - d)$

$= d + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-2)$

$= -2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(-1 + i\sqrt{3}\right)$

$= -2 - 1 + i\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

$= -3 + i\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

on a $R(B) = C$

$c = -3 + i\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B =$

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : 2BAC Série ou Filière : STE Session : Normal

Matière : MATH

Appréciations expliquant la note chiffrée :

Note définitive sur 20

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE :

$= -3 + i\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$

$= -3 + i\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$

$= -3 + i\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^2$

$= -3 + i\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left(1 + 2i\sqrt{3} - 3\right)$

$= -3 + \cancel{i\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{i\sqrt{3}} - \frac{3}{2}$

$= -1 - 3$

$= -4 = c$

donc $c = -4$

0,5

3.a)

$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-1 + i\sqrt{3} + 4}{-1 - i\sqrt{3} + 4} = \frac{(3 + i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})}{(3 - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})} = \frac{3^2 + 2i\sqrt{3} \times 3 - 3}{12}$

$= \frac{9 + 6i\sqrt{3} - 3}{12}$

$= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12}$

$= \frac{\cancel{6}(1 + i\sqrt{3})}{\cancel{6} \times 2}$

$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$

$\frac{b-c}{a-c} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

0,5

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

ⓑ $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]^2$

$= \left[1^2, \frac{2\pi}{3}\right]$

$= \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$

6

$\frac{c-d}{b-d} = \frac{-4-(-2)}{-1+i\sqrt{3}+2} = \frac{-2(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{-2+i2\sqrt{3}}{4}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

on a $\left|\frac{c-d}{b-d}\right| = 1$ et $\frac{c-d}{b-d} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$= \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$

donc $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$ 0,5

ⓔ Exercice 38

B B B V. V V R RR R

3 boules simult

$card(\Omega) = C_{10}^3 = 120$

1. $A\{\bar{R}.\bar{R}.\bar{R}\}$

$P(A) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{1}{6}$

2_ $B \begin{cases} B.B.B \\ V.V.V \end{cases}$

$P(B) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{120} = \frac{1}{60}$ 0,78

3_ $C\{R, \bar{R}, \bar{R}\}$ x3

$P(C) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{120} = \frac{1}{2}$

4) $D \begin{cases} R.R.\bar{R} \\ R.R.R \end{cases}$

$$P(D) = \frac{C_4^2 \times C_6^2 + C_4^3}{180} = \frac{1}{3}$$ 0,75

Exercice 4 :

1) on a $x \longmapsto x$ est une polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$

et on a $x \longmapsto e^x$ est un fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$

don $x \longmapsto xe^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$(xe^x)' = 1e^x + xe^x$$
$$= (1+x)e^x$$
$$= h(x)$$

$$I = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (x+1)e^x\,dx$$
$$= \left[xe^x \right]_{-1}^{0}$$
$$= -(-1e^{-1})$$
$$= 1e^{-1}$$
$$= \frac{1}{e}$$

$I = \frac{1}{e}$

0,75

ⓑ $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x \, dx$

on pose $u = (x+1)^2$ $\quad u' = 2(x+1)$

et $v' = e^x$ $\quad v = e^x$

$J = \left[(x+1)^2 e^x\right]_{-1}^{0} - 2\int_{-1}^{0} (x+1) e^x \, dx$

$= (1^2 \times 1 - (0) - 2\int_{-1}^{0} h(x)\, dx$

$= 1 - 2 \times \frac{1}{e}$

$= 1 - \frac{2}{e}$ $\quad J = 1 - \frac{2}{e}$ 0,75

② a) $(E) : y'' - 2y' + y = 0$

on a l'equation ~~ca~~ (E) $\quad r^2 - 2r + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 4 - 4$

$= 0$

$r = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ $\quad S = \{1\}$ 0,25

ROYAUME DU MAROC
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

Ministère de l'Éducation Nationale du Préscolaire et des Sports

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : 2 BAC Série ou Filière : STE Session : Normal

Matière : MATH

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée :

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE :

b) on a l'équation caractéristique du (E) :

$h(x) = (\alpha x + \beta) e^x$

$h(0) = 1 \Leftrightarrow (\alpha \times 0 + \beta) e^0 = 1$

$\Leftrightarrow \beta = 1.$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad h'(x) = \alpha \times e^x + (\alpha x + \beta) e^x$

$h'(0) = \alpha + \beta$

$2 = \alpha + \beta$

$\alpha = 2 - \beta$

$= 2 - 1$

$\alpha = 1$

donc $h(x) = (x + 1) e^x$

donc h est la solution de (E) : 0,5

Problème : $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = +\infty$

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$ / $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ 0,5

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

2/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = +\infty$

C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinnage de $+\infty$.

0,5

3/ ⓐ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 - x$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 - 1\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 - 1\right)\left(e^{\frac{x}{2}} - \cancel{1} + \cancel{1}\right)\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\left(e^{\frac{x}{2}} - 2\right)\left(e^{\frac{x}{2}}\right)\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}}\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} - 2xe^{\frac{x}{2}}$

$= 0$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{\frac{x}{2}} = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$

0,5

donc C_f admet une asymptote oblique d'équat; $y = x$ au voisinage de $-\infty$.

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) - x = x\left(e^{\frac{x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}} - 2\right)$

puisque $e^{\frac{x}{2}} > 0$ donc le signe $f(x) - x$ est celui de $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 2\right)$.

$x\left(e^{\frac{x}{2}}-2\right)=0 \iff x=0$ ou $e^{\frac{x}{2}}-2=0$

$\iff x=0$ ou $e^{\frac{x}{2}}=2$

$\iff x=0$ ou $\frac{x}{2}=\ln 2$

$\iff x=0$ ou $x=\ln 4$

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{\frac{x}{2}}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(e^{\frac{x}{2}}-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$e^{\frac{x}{2}}-2>0 \iff e^{\frac{x}{2}}>2$

$\iff \frac{x}{2}>\ln 2$

$\iff x>\ln 4$

sur $]-\infty,0]\cup[\ln 4,+\infty[$ on a $f(x)-x\geq 0$

$\iff f(x)\geq x$

donc C est au dessus de la droite (D).

sur $[0,\ln 4]$ on a $f(x)-x\leq 0 \iff f(x)\leq x$

donc la courbe C est au dessous de la droite (D)

4)

0,75

ⓐ $\forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+x\times \cancel{2}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\times\frac{1}{\cancel{2}}e^{\frac{x}{2}}$

$=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+x\,e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$

0,5

ⓑ $\forall x\in\mathbb{R}$

$x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)=0 \iff x=0$ ou $e^{\frac{x}{2}}-1=0$

$\iff x=0$ ou $e^{\frac{x}{2}}=1$

$\iff x=0$ ou $\frac{x}{2}=0$

$\iff x=0$ ou $x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{\frac{x}{2}}-1$		$-$	0	$+$	
$x(e^{\frac{x}{2}}-1)$		$+$	0	$+$	

$e^{\frac{x}{2}}-1>0 \iff e^{\frac{x}{2}}>1$

$\iff \frac{x}{2}>0$

$\iff x>0$

0,5

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

امتحانات نيل شهادة البكالوريا

المستوى : .... الشعبة أو المسلك : .... دورة : ....

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الامتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

donc $\forall x \in \mathbb{R}$. $x(e^{\frac{x}{2}}-1) \geq 0$

puisque $(e^{\frac{x}{2}}-1)^2 > 0$ et $e^{\frac{x}{2}} > 0$ et $x(e^{\frac{x}{2}}-1) \geq 0$

donc $f'(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

0,25

c)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0,25

5.a) $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f''(x) = \cancel{2}(e^{\frac{x}{2}}-1)\frac{1}{\cancel{2}}e^{\frac{x}{2}} + e^x + xe^x - (1\times e^{\frac{x}{2}} + x\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}})$

$= e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1) + e^x + xe^x - e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$

$= e^x - e^{\frac{x}{2}} + e^x + xe^x - e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$

$= 2e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}(-e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}})$

$= 2e^x - 2e^{\frac{x}{2}} - xe^{\frac{x}{2}}$

$= \cancel{\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}}$

0,5

$\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\times e^{\frac{x}{2}}(2x+4) - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\times x - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}4$

$= \frac{1}{2}e^x(2x+4) - \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}}$

$= \frac{1}{\cancel{2}}e^x\times\cancel{2}x + 2e^x - \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}}$

$= 2e^x + xe^x + e^{\frac{x}{2}}(-\frac{1}{2}x - 2)$

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

ROYAUME DU MAROC
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

Ministère de l'Éducation Nationale
du Préscolaire et des Sports
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵣⵡⴰⵔⴰⵏ ⴷ ⵜⵏⵓⵔⴰⵢ

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : 2BAC Série ou Filière : STE Session : Normal

Matière : Math

Note définitive sur 20 ....

Appréciations expliquant la note chiffrée : ....

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

4.a)

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + e^x + xe^x - \left(e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)$

$= e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right) + e^x + xe^x - e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$

$= e^x - e^{\frac{x}{2}} + e^x + xe^x - e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$

$= 2e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + xe^x - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$

$= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$ 0,25x2

car $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left((2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4\right)$

$= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}}(2x+4) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(-4)$

$= xe^x + 2e^x - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}}$

b) $\forall x \in]-\infty, \alpha]$ on a $x \leq \alpha$

g est décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ $\Rightarrow g(x) \geq g(\alpha)$

$\Rightarrow g(x) \geq 0$

$\forall x \in [\alpha, +\infty[$ on a $x \geq \alpha$

g est croissante sur $[\alpha, +\infty[$ $\Rightarrow g(x) \geq g(\alpha)$

$\Rightarrow g(x) \geq 0$

~~$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.~~

0,5

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$

puisque $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} > 0$

le signe de $f''(x)$ est celui de $g(x)$.

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

(sur $]-\infty, \alpha]$ on a $g(x)$)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$

donc $f''(x) \geq 0$

donc la courbe C est convexe

0,5

(b) sur $[\alpha, 0]$ on a $g(x) \leq 0$

sur $[0, +\infty[$ on a $g(x) \geq 0$

sur $]-\infty, \alpha] \cup [0, +\infty[$ f est convenxe 0,5

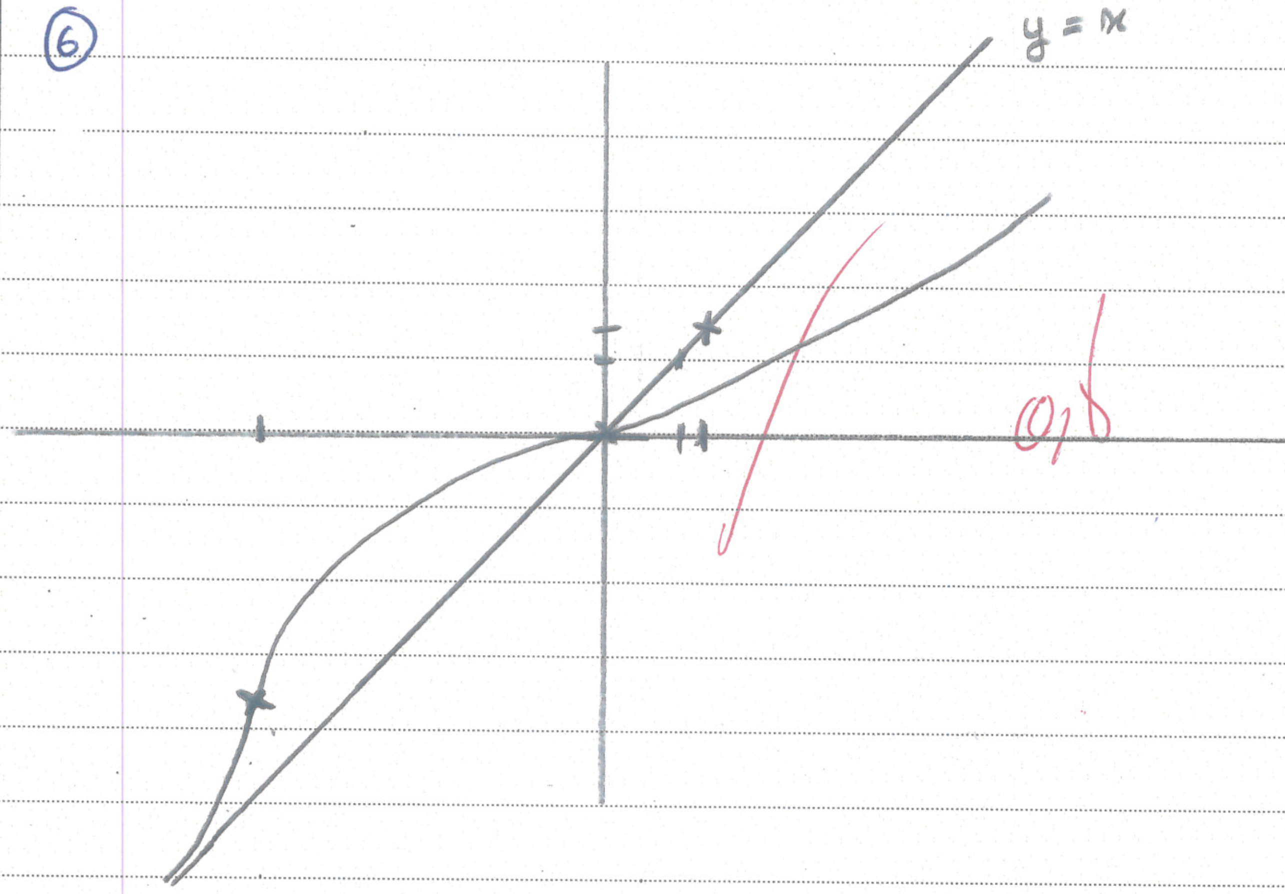
sur $[\alpha, 0]$ f est concave

(c) $f''(x) = 0 \iff g(x) = 0$

$\iff g(\alpha) = 0$ ou $g(0) = 0$

donc les points d'inflexions sont α et 0 car f'' s'annule et change de signe en α et 0. 0,5

(6)



0,1

7.a) on a $x \mapsto (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$ est une fonction expentielle continu sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto x$ est une polynome continu sur $\mathbb{R}$ 0,5

on a f est strictement croissante donc f admet une fonction réciproque

3) $u_0 = 1 \qquad u_{n+1} = f(u_n)$

a) pour $n = 0 \qquad 0 < u_0 = 1 < \ln 4$

soit $n \in \mathbb{N}$

on suppose que $0 < U_n < \ln 4$

on montre que $0 < U_{n+1} < \ln 4$ 0,5

on a $0 < U_n < \ln 4 \Leftrightarrow f(0) < f(U_n) < f(\ln 4)$

$\Leftrightarrow 0 < U_{n+1} < \ln 4$

on a $f(x) - x < 0 \Rightarrow f(x) < x$ f est croissante

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x \Rightarrow f(\ln 4) < \ln 4$

d'après le principe de récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < U_n < \ln 4$.

b) $U_{n+1} - U_n$

sur $]0, \ln 4[$ on a $f(x) < x$

$\forall n \in]0, \ln 4[$ on a $f(U_n) < U_n$

$U_{n+1} < U_n$

donc (U_n) est décroissante. 0,5

c) on a (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc ~~elle~~ est convergente. 0,5

d) on a f est continu sur $]0, \ln 4[$.

$f(]0, \ln 4[) \subset]0, \ln 4[$

(U_n) est convergente.

la ~~solutio~~ limite de (U_n) est la solution

d'equation $f(x) = x \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad \cancel{x}(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = \cancel{x}$

$\Leftrightarrow (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - 1 = 1$

$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = \ln 4$

la limite de (U_n) est $\ln 4$.

$$\lim U_n = \cancel{\ln 4}.$$

Problème

ⓒ $f''(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $g(x)$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

0,5.

f'' s'annule et change de signe α et 0 donc elle admit deux points d'inflexions α et 0.

ⓑ sur $]-\infty, \alpha]$ on a $g(x) \geq 0$

sur $[\alpha, 0]$ on a $g(x) \leq 0$

sur $[0, +\infty[$ on a $g(x) \geq 0$.

donc sur $]-\infty, \alpha] \cup [0, +\infty[$ on a $g(x) \geq 0$

et sur $[\alpha, 0]$ on a $g(x) \leq 0$

0,5

ⓑ $(f^{-1})'(\ln 4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\ln 4))} = \frac{1}{\ln 4}$ on a $f(\ln 4) = \ln 4$

$f'(\ln 4) = \ln 4$

0,0