Math 4301

ROYAUME DU MAROC
Ministère de l'Éducation Nationale du Préscolaire et des Sports

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : .... Série ou Filière : .... Session : ....

Matière : ....

Note définitive sur 20: 20/20

Appréciations expliquant la note chiffrée : Vingt

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

508752

Exercice 1 8.

A - 1 - Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 > 0$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x+1} \leq 1$

$x^3 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^3}{x+1} \leq x^3.$

$\Rightarrow 0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3.$

car $1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} = \frac{x + 1 - x^2 - x + x^3 + x^2 - 1}{x+1}$

$= \frac{x^3}{x+1}.$

0,75 + 0,25 + 0,25

D'où $(\forall x \in [0;+\infty[) : 0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3.$

2) $(\forall x \in [0;+\infty[) : 0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3.$ (*)

Les fonctions $x \to 1 - x + x^2$ et $x \to x^3$ sont continues sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0;x]$

$x \to \frac{1}{x+1}$ est continue sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$

D'où elle est continue sur $[0;x]$ $([0;x] \subset]-1;+\infty[)$

(*) D'où $\Rightarrow 0 \leq \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^3\,dt$

$\Rightarrow 0 \leq [t]_0^x - [\frac{1}{2}t^2]_0^x + [\frac{1}{3}t^3]_0^x - [\ln(1+t)]_0^x \leq [\frac{1}{4}t^4]_0^x$

$\Rightarrow 0 \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ln(x+1) \leq \frac{1}{4}x^4$

0,75

B - $\begin{cases} f(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \ ; \ x > 0. \\ f(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

3

0,5

1). $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

On a D'après la partie (A).

$(\forall x\in \mathbb{R}^+) : 0 \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ln(x+1) \leq \dfrac{x^4}{4}$

Donc $(\forall x\in \mathbb{R}^{*}_{+}) : 0 \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ln(x+1) \leq \dfrac{x^4}{4}$.

D'où $x>0 \Rightarrow 0 \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ln(x+1) \leq \dfrac{x^4}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} \leq x - \ln(x+1) \leq \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$.

$x^2>0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3} \leq \dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2} \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}$. (*)

On a $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{2}$.

et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{2}$.

D'où $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2} = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$= \dfrac{1}{2} = f(0)$

Donc f est continue à droite en 0.

0,5

b). $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{x-\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{2}}{x}$.

(*) $\Rightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3} \leq \dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2} \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}$.

$\Rightarrow -\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2} - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{3}$.

$x>0 \Rightarrow -\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{\frac{x-\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} \leq \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{3}$

On a $\lim\limits_{x\to0^+} -\dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3}$.

et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3}$.

D'où $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{x-\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} = -\dfrac{1}{3}$.

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{3}$.

c). $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \times \frac{(x+1)^2}{x^2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{1}{x+1} \times \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

$= 0$

(car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$

Donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $(\Delta) : y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

0,5

2)a). $x \to x+1$ est strictement positive et dérivable sur $]0;+\infty[$

$x \to \ln(x+1)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

$x \to x^2$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$

$x \to x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Donc $x \to x - \ln(x+1)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

D'où f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

0,5

Soit $x \in]0;+\infty[$:

$f'(x) = \frac{(1 - \frac{1}{x+1})x^2 - 2x(x - \ln(x+1))}{x^4}$

$= \frac{x - \frac{x}{x+1} - 2x + 2\ln(1+x)}{x^3}$

$= -\frac{\left(\frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)\right)}{x^3}$

$[0;x]$

$1;+\infty[$

$]-1;+\infty[$

$\int_0^x$

$\int_0^x \left(\frac{1}{4}t^4\right)$

$\leq \frac{1}{4}x^4$

=

امتحانات نيل شهادة البكالوريا

المستوى : .... الشعبة أو المسلك : .... دورة : ....

خاص بكتابة الامتحان	مادة :	على 20	النقطة النهائية
	التقدير المفسر للنقطة	بالحروف	

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

$= \dfrac{-g(x)}{x^3}$ avec $g(x) = x + \dfrac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$

b) $x \longrightarrow x+1$ est dérivable et strictement positive sur $[0;+\infty[$

$x \longrightarrow \ln(x+1)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$

$x \longrightarrow \dfrac{x}{x+1}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, Donc elle est dérivable sur $[0;+\infty[$

$x \longrightarrow x$ est dérivable sur $[0;+\infty[$

Donc g est dérivable sur $[0;+\infty[$:

Soit $x \in [0;+\infty[$:

$g'(x) = 1 + \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2 \times \dfrac{1}{1+x}$.

$= \dfrac{x^2 + \cancel{2x} + 1 + 1 - \cancel{2x} - 2}{(1+x)^2}$

$= \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$.

$x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x+1} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^2}{x+1} \leq x^2$

$\Rightarrow 0 \leq g'(x) \leq x^2$

c) Soit $x \in [0;+\infty[$:

si $x = 0$: $0 \leq g(0) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 0 \leq 0$

(1) soit le resultat.

Si $x \neq 0$; Soit $t \in [0;x]$.

2/5

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : .... Série ou Filière : .... Session : ....

Matière : ....

Note définitive sur 20 ....

Appréciations expliquant la note chiffrée : ....

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

$0 \leq t \leq x \Rightarrow t \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq g'(t) \leq t^2$.

$t \to \frac{t^2}{(t+1)^2}$ est continue sur $[0;x)$.

$* \to t^2$ est continue sur $[0;x)$.

Donc g' et $t \to t^2$ sont continues sur $[0;x)$.

D'où $0 \leq \int_0^x g'(t)dt \leq \int_0^x t^2 dt$.

$\Rightarrow 0 \leq [g(t)]_0^x \leq [\frac{1}{3}t^3]_0^x$.

$\Rightarrow 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{3}x^3$.

d) On a $(\forall x \in [0;+\infty[)$: $g(x) \geq 0$.

D'où $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $g(x) > 0$.

car g est croissante et ne s'annule que pour $x=0$.

D'où $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $-g(x) < 0$

D'où $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $f'(x) < 0$.

car $x^3 > 0$.

D'où f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

or f est continue à droite en 0.

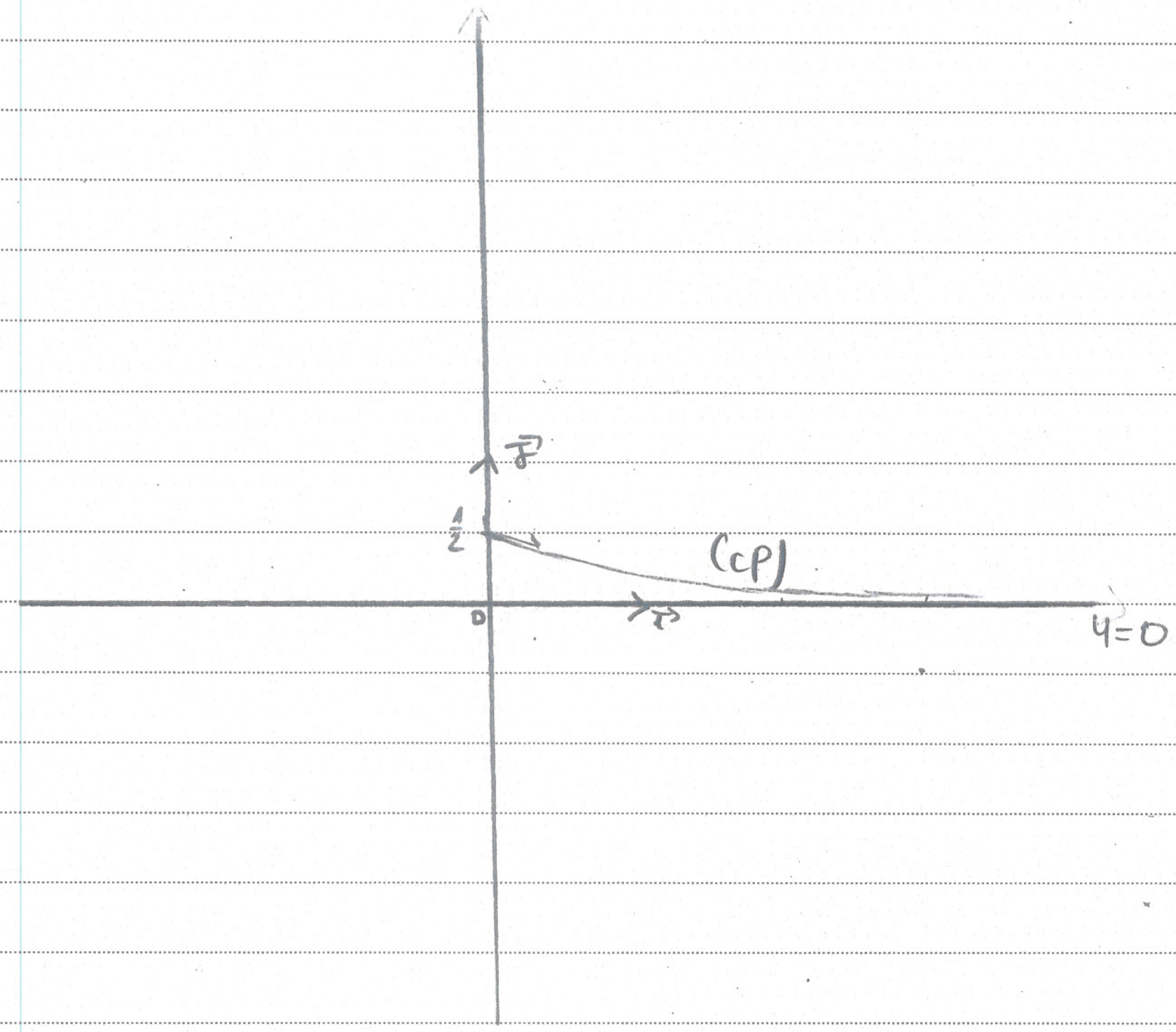
Donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

3) a).

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	0

2,75

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance



f est dérivable à droite en 0

et $f'_d(0) = -\frac{1}{3}$. Donc (C_f) admet à droite au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$.

c) 1- Posons. $h(x) = f(x) - x$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (D'après ce qui précède)

Donc f est dérivable sur $]0;1[$.

D'où f est continue sur $]0;1[$.

$x \to -x$ est dérivable sur $]0;1[$.

D'où h est continue sur $]0;1[$.

f est strictement décroissante sur $]0;1[$.

$x \to -x$ est strictement décroissante sur $]0;1[$.

Donc h est strictement décroissante sur

sur $]0;1[$

Donc h réalise une bijection de $]0;1[$ vers $h(]0;1[)$.

$h(]0;1[) =]-1;\frac{1}{2}[$

On a $h(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2}$ et $h(1) = f(1) - 1 = -1$

$0 \in]-1;\frac{1}{2}[\Rightarrow \exists! \alpha \in]0;1[. h(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \exists! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha) = \alpha.$

2) $\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) & ; n \in \mathbb{N} \\ U_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

a) Pour $n = 0$

$U_0 = \frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3} \in [0;1]$.

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Soit n dans $\mathbb{N}$.

Supposons que $U_n \in [0;1]$.

Montrons que $U_{n+1} \in [0;1]$.

On a D'après le tableau de variation de f.

$(\forall x \in [0;+\infty[) : 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

D'où $(\forall x \in [0;1]) : 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \leq 1$.

Donc $(\forall x \in [0;1]) : 0 \leq f(x) \leq 1$

On a $U_{n+1} = f(U_n)$, et $U_n \in [0;1]$

D'où $0 \leq f(U_n) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$

Donc, D'après le principe de récurrence :

$(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \in [0;1]$.

b) Si $U_n = \alpha$. Soit $U_n \in [0;1]$ et $\alpha \in]0;1[$. $0 \leq 0$ D'où le résultat.

Si $U_n \neq \alpha$, Posons $a = \min(U_n, \alpha)$

et $b = \max(U_n, \alpha)$

0.5

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

امتحانات نيل شهادة البكالوريا

المستوى : .... الشعبة أو المسلك : .... دورة : ....

خاص بكتابة الامتحان

مادة : ....

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

On a $a<b$ car : $u_n \neq \alpha$.

f est continue sur $[a;b]$

f est dérivable sur $]a;b[$.

car f est ~~dérivable~~ dérivable sur $]0;+\infty[$ et continue à droite en 0.

et $[a;b] \subset [0;+\infty[$

On a $(\forall x \in [0;+\infty[)$: $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{x^3}{3}$.

D'où $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{x^3}{3}$.

D'où $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $-\frac{1}{3} \leqslant -\frac{g(x)}{x^3} \leqslant 0$

D'où $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $-\frac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

D'où $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{3}$.

D'où $(\forall x \in]a;b[)$: $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{3}$ $(]a;b[\subset]0;+\infty[)$

0,5

Donc, D'après I.A.F :

$(\forall x \in [a;b])$: $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{3}|x-y|$

en particulier pour $x = u_n$ et $y = \alpha$.

avec $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$.

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$.

c) Pour $n = 0$

$u_0 - \alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \alpha < 1$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha \geqslant -\frac{2}{3}$.

et puisque $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha \geqslant -\frac{2}{3}$.

ROYAUME DU MAROC
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
Ministère de l'Éducation Nationale du Préscolaire et des Sports

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : .... Série ou Filière : .... Session : ....

Note définitive sur 20

Matière : ....

Appréciations expliquant la note chiffrée : ....

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

Donc la prop est vraie pour $n=0$

Soit $n \in \mathbb{N}$:

Supposons que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Montrons que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$ et $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

D'où $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$ et $\frac{1}{3}|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

Donc. $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

Donc D'après le principe de récurrence.

$(\forall n \in \mathbb{N})$: $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

d) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

on a $0 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Donc D'après le critère de convergence

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$.

D) $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$; $x \in [0; +\infty[$

1) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (D'après ce qui précède)

Donc f est continue sur $]0; +\infty[$

et on a f est continue à droite en 0

Donc f est continue sur $[0; +\infty[$;

$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.

f est continue sur $[0; +\infty[$, Donc f est continue sur $[0; +\infty[$, $1 \in [0; +\infty[$.

Donc F est dérivable sur $[0;+\infty[$.

Soit $x \in [0;+\infty[$:

$$F'(x) = -f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

2) a) $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+\cancel{t}) - \cancel{t}}{\cancel{t}^2} \, d\cancel{t}$.

Posons $\begin{cases} u(t) = \ln(1+t) - t \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{1+t} - 1. \\ v(t) = -\frac{1}{t}. \end{cases}$

0/1

D'où $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} \, dt$.

$$= \left[\frac{-1}{t}(\ln(1+t) - t)\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{\cancel{t}}\left(\frac{-\cancel{t}}{1+t}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{x}(\ln(1+x) - x) + \ln(2) - 1 - [\ln(1+t)]_1^x$$

$$= -\frac{1}{x}(\ln(1+x) - x) + \ln(2) - 1 - \ln(1+x) + \ln(2)$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(1+x) + \cancel{1} + \ln(2) - \cancel{1} - \ln(1+x) + \ln(2)$$

$$= 2\ln(2) - \ln(1+x)\left(\frac{1}{x} + 1\right).$$

0/1

b) $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} 2\ln(2) - \frac{\ln(1+x)}{x} - \ln(1+x)$

$$= 2\ln(2) - 1.$$

(car $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln(1+x) = \ln(1) = 0$)

On a : On a F est continue à droite en 0

Donc $\lim_{x \to 0^+} F(x) = 2\ln(2) - 1 = F(0)$

On a $F(0) = \int_0^1 f(t) \, dt$.

D'où $\int_0^1 f(t) \, dt = F(0) = 2\ln(2) - 1$.

0/1

c) $A = \int_0^1 |f(x)| \, dx \cdot (u.a)$.

On a $(\forall x \in [0;1]) : 0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$.

D'où $A = \int_0^1 f(x) \, dx \, (u.a) = (2\ln(2) - 1) / 4 \, cm^2$.

$\mathcal{A} = 8\ln(2) - 4\ cm^2$.

E)- $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt$.

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k$.

1)a) Soit $k \in \mathbb{N}$; Soit $t \in [k ; k+1]$

$t \in [k ; k+1] \Rightarrow k \leq t \leq k+1$

$\Rightarrow f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ (1)

car f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ et $[k;k+1] \subset [0;+\infty[$

D'où (1) $\Rightarrow f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$

f est continue sur $[k ; k+1]$

et $t \to f(k)$ et $t \to f(k+1)$

~~sont~~ continues sur $[k ; k+1]$

D'où $\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt$

$\Rightarrow (k+1-k)\ f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq (k+1-k) f(k)$

$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$

$\Rightarrow -f(k) \leq -\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq -f(k+1)$

$\Rightarrow f(k) - f(k) \leq f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) - f(k+1)$

$\Rightarrow 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$ soit $k \in \{0 ; \dots ; n-1\}$

$k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0 ; \dots ; n-1\}$.

$\Rightarrow 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)$

$\Rightarrow 0 \leq S_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$\Rightarrow 0 \leq S_n \leq f(0) - f(n)$

$\Rightarrow 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2} - f(n)$.

On a $n > 0 \Rightarrow f(n) > 0$

$\Rightarrow -f(n) < 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} - f(n) < \frac{1}{2}$.

D'où $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$.

0,25

0,5

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

امتحانات نيل شهادة البكالوريا

المستوى : .... الشعبة أو المسلك : .... دورة : ....

خاص بكتابة الامتحان

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

2) a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \cancel{\Delta_k} - \sum_{k=0}^{n} \Delta_k$

$= \Delta_n$.

$= f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt = \Delta_n$.

On a $0 < n \leq t \leq n+1 \Rightarrow t > 0$

$\Rightarrow f(t) > 0$ (car $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $0 < f(x) < \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(t)\,dt > 0$

car f st continue sur $[n; n+1]$.

D'où $-f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt < 0$

Donc $S_{n+1} - S_n < 0$

D'où $(S_n)_{n\geq 1}$ st décroissante.

b) $(S_n)_{n\geq 1}$ st décroissante.

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $0 < S_n < \frac{1}{2}$.

Donc $(S_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0.

D'où $(S_n)_{n\geq 1}$ st convergente, Posons $l = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

On a $(\forall k \in \mathbb{N})$: $0 < \Delta_k < f(k) - f(k+1)$

en particulier pour $k = n$

D'où $\Delta_n > 0$.

Donc $S_{n+1} - S_n > 0$

Donc $(S_n)_{n\geq 1}$ st croissante.

b). $(S_n)_{n\geq 1}$ st croissante.

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $0 < S_n < \frac{1}{2}$.

D'où $(S_n)_{n\geq 1}$ st majorée par $\frac{1}{2}$

0/2

0

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale du Préscolaire et des Sports

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : .... Série ou Filière : .... Session : ....

Matière : ....

Appréciations expliquant la note chiffrée :

Note définitive sur 20
....

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

0,25 Donc $(S_n)_{n\geq1}$ est convergente, posons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

c) on a $(S_n)_{n\geq1}$ est croissante Donc elle est minorée par son premier terme $S_1 = D_0$.

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_n \geq S_1$.

on a $S_1 = D_0 = f(0) - \int_0^1 f(t)\,dt$

(D'après ce qui précède) $= \frac{1}{2} - 2\ln(2) + 1 = \frac{3}{2} - 2\ln(2)$

0,25 D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{3}{2} - 2\ln(2) \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

D'où par passage à la limite

$\frac{3}{2} - 2\ln(2) \leq l \leq \frac{1}{2}$

Exercice 02 : $m \in \mathbb{C}^*$. $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

I) (E_m) : $z^2 + mj^2 z + m^2 j = 0$.

1) $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1$.

$1 + j + j^2$

$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3} + \pi}$

0,5 $= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= 1 - 1 + i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

2) a) $\Delta = m^2 j^4 - 4 \times m^2 j$

$= m^2 j - 4m^2 j$

$= -3m^2 j$.

0,25 on a $(m(1-j))^2 = m^2(1 - 2j + j^2)$

$= m^2(\cancel{1} - 2j - \cancel{1} - j)$. $(1 + j + j^2 = 0)$

$= -3jm^2$.

4,5

D'où $\Delta = (m(1-j))^2$.

b) $z_1 = \frac{-mj^2 + m(1-j)}{2} = \frac{-mj^2 + m - mj}{2}$

$= \frac{-m(-1-j) + m - jm}{2}$

$= \frac{2m + \cancel{mj} - \cancel{jm}}{2}$

$= m$.

0/1

$z_2 = \frac{-mj2 - m + mj}{2} = \frac{\cancel{m} + jm - \cancel{m} + jm}{2}$

$= jm$.

3) $m = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$(z_1 + z_2)^{2022} = \left(\frac{-mj^2}{1}\right)^{2022}$.

$= \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{2022}$.

$= (\sqrt{2})^{2022}.\ e^{i\frac{1011\pi}{2}} \cdot e^{i\,2696\pi}$

$= -(\sqrt{2})^{2022}\, i$

car $e^{2696\pi} = \left(e^{2\pi}\right)^{1348} = 1$

et $e^{i\frac{1010\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = e^{i\pi} . e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= -i$

0/1

D'où $(z_1 + z_2)^{2022} \in i\mathbb{R}$.

II - 1) $z' = (1+j)\, z = -j^2\, z$.

$= -e^{i\frac{4\pi}{3}}\, z$.

$= -e^{i\frac{\pi}{3}} . e^{i\pi}\, z$

$= e^{i\frac{\pi}{3}}\, z$.

0/2

On a $|e^{i\frac{\pi}{3}}| = 1$

Donc la nature de cette transformation st une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre $O(0)$.

2) a) $a' = \varphi(a) \Rightarrow a' = (1+j)\, a$

$\Rightarrow a' = -j^2\, m \quad (j + j^2 + 1 = 0)$

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

امتحانات نيل شهادة البكالوريا

المستوى : .... الشعبة أو المسلك : .... دورة : ....

مادة : ....

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الامتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

D'où $\frac{p-1}{q-1} = j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $(q \neq 1)$

D'où $(\overrightarrow{RQ}; \overrightarrow{RP}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

D'où PQR st équilatéral.

0,5

Exercice : 3 :

$n > 1$. (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$.

1).a) Soit n dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

$(x;y)$ sol de (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$.

On a $p / n \Rightarrow p / ny$

$\Rightarrow p / (x+1)^n - x^n$

$\Rightarrow (x+1)^n \equiv x^n [p]$.

0,25

b) • Si $p \wedge x \neq 1$. et p premier positif

Alors $p / x \Rightarrow p / x^n$ et p / n.

$\Rightarrow p / x^n$ et p / ny.

$\Rightarrow p / x^n + ny$.

$\Rightarrow p / (x+1)^n$.

p premier $\Rightarrow p / x+1$ et p / x.

$\Rightarrow p / 1$. Absurde.

car p st premier.

Alors $p \wedge x = 1$

0,25

• Supposons que $p \wedge (x+1) \neq 1$. , p premier positif

Alors $(p / x+1$ et $p / n) \Rightarrow p / (x+1)^n$ et p / ny.

$\Rightarrow p / (x+1)^n - ny$.

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

ROYAUME DU MAROC
Ministère de l'Éducation Nationale du Préscolaire et des Sports

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : .... Série ou Filière : .... Session : ....

Matière : ....

Note définitive sur 20
....

Appréciations expliquant la note chiffrée : ....

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

$\Rightarrow p / x^n$

p premier $\Rightarrow p / x$ et $p / x+1$

$\Rightarrow p / x+1-x$

$\Rightarrow p/1$ Absurde car 1 est premier.

D'où $p \wedge (x+1) = 1$

c) p premier positif. $p \wedge x = 1$ et $p \wedge (x+1) = 1$

0,25

Donc, D'après Fermat :

$x^{p-1} \equiv 1 [p]$ et $(x+1)^{p-1} \equiv 1 [p]$

D'où $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} [p]$

2) n est pair $\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) : n = 2k$.

Si x est pair, Alors $x+1$ est impair.

et x^n est pair et $(x+1)^n$ est impair.

D'où $(x+1)^n - x^n$ est impair.

Or $(x+1)^n - x^n = ny \Rightarrow (x+1)^n - x^n = 2ky$

$\Rightarrow 2 / (x+1)^n - x^n$ Absurde.

car $(x+1)^n - x^n$ est impair.

0,5

Si x est impair alors x^n est impair

et $x+1$ est pair D'où $(x+1)^n$ est pair

D'où $(x+1)^n - x^n$ est impair

Or $(x+1)^n - x^n = 2ky \Rightarrow 2 / (x+1)^n - x^n$

Absurde.

Donc, dans tous les cas, Si n est pair,

2,5

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3) Supposons que n est impair

a). Montrons $n \wedge (p-1) = 1$.

on a p est le petit diviseur de n.

~~Effectuons la division euclidienne de n par $p-1$~~

~~Alors~~

0,5

on a $p-1 \nmid n$ car $p-1 < p$.

et p le plus petit diviseur de n.

Posons $d = (p-1) \wedge n$ avec $d \geq 1$

on a $d / p-1$ et d / n.

on a $d / p-1 \Rightarrow d \leq p-1 < p$.

et d/n Absurde car p le plus petit diviseur de n.

D'où $d = 1$.

0,25

b) $u = (p-1)q + r$; $0 \leq r < p-1$

D'où $nu = (p-1)qn + rn$.

$rn = 1 - (p-1)v - (p-1)qn$

$rn = 1 - (p-1)(v + qn)$.

0,1

c) $v' = -(v + nq)$.

on a r est le reste de la division de u par $p-1$

Donc $r \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \Rightarrow n \geq 1$

D'où $nr \geq 0$ et $p-1 > 0$.

or $rn = 1 - (p-1)(v + qn)$

D'où $-(v+qn) \geq 0 \Rightarrow v' \geq 0$.

d) $nr = 1 + (p-1)v'$.

(on a.)

(on a

on a. $v' \geq 0$.

$nr = 1 - (p-1)(v+mq)$

$nr = 1 + v'(p-1)$.

On a. $x^{p-1} \equiv 1 [p] \Rightarrow x^{(p-1)v'} \equiv 1 [p]$

et $x^n \equiv (x+1)^n [p]$

D'où $x^{n.r} \equiv (x+1)^{nr} [p]$

$x^{(p-1)v'} \equiv (x+1)^{nr} [p]$

D'où $(x+1)^{nr} \equiv 1 [p]$ (*)

$(x+1)^{v'(p-1)+1} \equiv x+1 [p]$

$\Rightarrow (x+1)^{nr} \equiv x+1 [p]$

(*) $\Rightarrow 1 \equiv x+1 [p]$

$\Rightarrow p/x$ Absurde

car $p \wedge x = 1$

Donc (En) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

0/1

[redacted]

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : .... Série ou Filière : .... Session : ....

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée :

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

Exercice 04.

1)a). $E = \{ M(a;b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \}$

$\rightarrow E \subset M_2(\mathbb{R})$

$\rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1;0)$ $\quad (1;0) \in \mathbb{Z}^2$.

Donc $I \in E$ D'où $E \neq \emptyset$ (1)

$\rightarrow$ Soient $M(a;b)$ et $M(x;y)$ dans E $\quad (a;b;x;y) \in \mathbb{Z}^4$.
Soit $-M(x;y)$ le symétrique de $M(x;y)$ dans $(M_2(\mathbb{R});+)$.

1,25

$M(a;b) + (-M(x;y)) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -3y \\ -y & -x \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a-x & 3(b-y) \\ b-y & a-x \end{pmatrix}$

$= M(a-x;b-y)$.

$(a-x;b-y) \in \mathbb{Z}^2$.

D'où $M(a;b) + (-M(x;y)) \in E$.

D'où E est un sous-groupe du groupe commutatif $(M_2(\mathbb{R});+)$.

b) Soient $M(a;b)$ et $M(c;d)$ dans E $(a;b;c;d) \in \mathbb{Z}^4$

1,5

$M(a;b) \times M(c;d) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ac+3bd & 3(ad+bc) \\ bc+ad & 3bd+ac \end{pmatrix}$

7,25

$= M(ac + 3bd \, ; ad + bc)$.

c) On a $(\forall M(a;b), M(c;d) \in E^2) : M(a;b) \times M(c;d)$
$= M(ac+3bd ; ad+bc)$

On a $ac + 3bd \in \mathbb{Z}$ et $ad + bc \in \mathbb{Z}$
car $(a;b;c;d) \in \mathbb{Z}^4$.

D'où $M(a;b) \times M(c;d) \in E$.

Donc E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}) ; \times)$.

Montrons que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

→ E est un sous-groupe du groupe commutatif $(M_2(\mathbb{R});+)$

D'où $(E;+)$ est un groupe commutatif.

→ E est stable dans $(M_2(\mathbb{R});\times)$.

et puisque $(M_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau.

Alors "$\times$" est associative et distributive par rapport à "+" dans $(M_2(\mathbb{R});\times)$.

D'où "$\times$" est associative et distributive par rapport à "+" dans $(E;\times)$.

Donc $(E;+;\times)$ est un anneau.

I est l'élément neutre dans $(M_2(\mathbb{R});\times)$

et on a $I \in E$ (D'après ①)

D'où I est l'élément neutre dans $(E;\times)$

Montrons que "$\times$" est commutative dans E

D'après ce qui précède et en inversant les rôles $a \leftrightarrow c$ et $b \leftrightarrow d$.

$M(a;b) \times M(c;d) = M(ac + 3bd \, ; ad + bc)$.

D'où en inversant les rôles.

$M(c;d) \times M(a;b) = M(ca + 3db \, ; \cancel{c}\, cb + da)$
$= M(a;b) \times M(c;d)$

car "+" et "$\times$" sont commutatives sur $\mathbb{R}$.

Q.1

Donc "x" est commutative dans E.

Donc $(E;+;\times)$ est un anneau unitaire commutatif

2) $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{Z}$

$M(a;b) \longrightarrow |a^2 - 3b^2|$.

Soient $M(a;b)$ et $M(x;y)$ dans E : $(a;b;x;y) \in \mathbb{Z}^4$

$\varphi(M(a;b) \times M(x;y)) = \varphi(M(ac+3bd; ad+bc))$
D'après 1)b)

$= |(ax+3by)^2 - 3(ay+bx)^2|$

$= |(ax)^2 + 6ax\,by + 9(by)^2 - 3(ay)^2 - 3(bx)^2 - 6ay\,bx|$ 0/1

$\varphi(M(a;b)) \times \varphi(M(x;y)) = |a^2 - 3b^2|\,|x^2 - 3y^2|$

$= |(a^2 - 3b^2)(x^2 - 3y^2)|$

$= |(ax)^2 - 3(ay)^2 - 3(bx)^2 + 9(by)^2|$

D'où $\varphi(M(a;b) \times M(x;y)) = \varphi(M(a;b)) \times \varphi(M(x;y))$.

D'où φ est un homomorphisme de $(E;\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$.

3) Soit $M(a;b) \in E$.

a) Soit $M(a;b)$ dans E : $(a;b) \in$

$M(a;b) \times M(a;-b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^2 - 3b^2 & -3ab + 3ba \\ ab - ab & -3b^2 + a^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^2 - 3b^2 & 0 \\ 0 & a^2 - 3b^2 \end{pmatrix}$ 0/25

$= (a^2 - 3b^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= (a^2 - 3b^2)\,I$

b) Mq Si $M(a;b)$ est inversible, alors $\varphi(M(a;b)) = 1$

Soit $M(a;b) \in E$ $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$.

~~Supposons que $M(a;b)$ inversible dans $(M_2(\mathbb{R});\times)$~~

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

امتحانات نيل شهادة البكالوريا

المستوى : .... الشعبة أو المسلك : .... دورة : ....

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الامتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

~~Alors : $\det M \neq 0 \Rightarrow a^2 - 3b^2 \neq 0$.~~

~~M est inversible dans $(E; \times)$.~~
~~Donc il existe $(M(a;b))^{-1} \in E$~~
~~tel que $M(a;b) \times (M(a;b))^{-1} = I$~~
~~(La loi $*$ est commutative)~~
~~D'où $M(a;b) \times M(a;-b) \times (M(a;b))^{-1} = I\, M(a;-b)$~~
~~$(a^2 - 3b^2)(M(a;b))^{-1} = M(a;-b)$~~

Voir (*)

c). Supposons que $\varphi(M(a;b)) = 1$.

Donc $|a^2 - 3b^2| = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{l} a^2 - 3b^2 = 1 \text{ ou} \\ a^2 - 3b^2 = -1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow a^2 - 3b^2 \neq 0$

$\Rightarrow \det M \neq 0$

Donc $M(a;b)$ est inversible dans $(M_2(\mathbb{R}); \times)$ et son inverse dans $(M_2(\mathbb{R}); \times)$ est :

$$(M(a;b))^{-1} = \frac{1}{a^2 - 3b^2}\begin{pmatrix} a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - 3b^2} & \frac{-3b}{a^2 - 3b^2} \\ \frac{-b}{a^2 - 3b^2} & \frac{a}{a^2 - 3b^2} \end{pmatrix}$$

On a $a^2 - 3b^2 = 1$ ou $a^2 - 3b^2 = -1$.

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Niveau : .... Série ou Filière : .... Session : ....

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée :

RÉSERVÉ AU SECRÉTARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

D'où $\frac{a}{a^2-3b^2} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{-b}{a^2-3b^2} \in \mathbb{Z}$.

D'où $M\left(\frac{a}{a^2-3b^2} ; \frac{-b}{a^2-3b^2}\right) \in E$.

Donc $M(a;b)$ est inversible dans $(E;\times)$.

4) a). Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$.

$\varphi(M(a;b)) = 0 \Leftrightarrow |a^2-3b^2| = 0$

$\Leftrightarrow (a^2-3b^2=0$ ou $3b^2-a^2=0)$

$\Leftrightarrow a^2-3b^2=0$

fixons b dans $\mathbb{Z}$:

$a^2-3b^2=0$

$\Delta = 4b^2$.

D'où $a = b$ ou $a = -b$.

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ Alors $a^2 \neq 0$ et $3b^2 \neq 0$

D'où $a^2-3b^2 \neq 0$.

D'où $a = b = 0$.

Donc $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2)$: $\varphi(M(a;b)) = 0 \Leftrightarrow a=b=0$

b). on a $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2)$: $\varphi(M(a;b)) = 0 \Leftrightarrow a=b=0$

et φ est un homomorphisme de $(E;\times)$ vers $(\mathbb{Z};\times)$.

~~Alors~~ $\cancel{(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2) : \varphi(M(a;b)) \times \varphi(M(x;y)) = 0 \Leftrightarrow a=b=0}$

D'où $\cancel{(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2)}$

$M(a;b)$ st inversible dans $(E;\times)$

Donc $\exists (M(a;b))^{-1} \in E$, $M(a;b) \times (M(a;b))^{-1} = I$

($\times$ st commutative)

D'où $\varphi(M(a;b)) \times (\varphi(M(a;b)))^{-1} = \varphi(I)$

$\varphi(M(a;b)) \times \frac{1}{|a^2-3b^2|} = 1$

$\varphi(M(a;b)) = |a^2-3b^2|$

b) $\varphi(M(a;b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

~~Donc $(\exists M(x;y) \in E)$: $M(a;b) \times M(x;y) = 0$~~

Montrons l'anneau n'admet pas de diviseur de zéro.

Donc $(\forall M(a;b) \in E)$ $(\exists M(x;y) \in E)$. $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$, $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$

$M(a;b) \times M(x;y) = 0 \Rightarrow M(a;b) = 0$ ou $M(x;y) = 0$

On a $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2)$: $\varphi(M(a;b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

On a $M(a;b) \times M(x;y) = 0 \Rightarrow \varphi(M(a;b)) \times \varphi(M(x;y)) = 0$

$\Rightarrow |a^2-3b^2| = 0$ ou $|x^2-3y^2| = 0$

$\Rightarrow \varphi(M(a;b)) = 0$ ou $\varphi(M(x;y)) = 0$

$\Rightarrow (a = b = 0$ ou $x = y = 0)$

Donc $(E;+;\times)$ st intègre.

c) On a $\varphi(M(a;b)) \neq 1 \Rightarrow M(a;b)$ n'st pas inversible dans $(E;\times)$

Donc, on peut trouver de E qui ont le déterminant différent de 1 ou -1 et qui n'ont pas inversibles dans $(E^*;\times)$.

0/2

Par exemple : $\varphi(M(1;\cancel{2})) = 2$.

On a $\det M(1;1) \neq 0$

Donc elle est inversible dans $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

et $(M(1;1))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

on a $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \notin \mathbb{Z}^2$

D'où $M(1;1)$ n'est pas inversible dans $(E; \times)$.

Donc $(E; +; \times)$ n'est pas un corps. 0/1,5

b) On a $M(a;b)$ est inversible dans $(E; \times)$. (4)

Donc il existe $(M(a;b))^{-1}$ dans $(E; \times)$

tel que $(M(a;b))^{-1} \times M(a;b) = I$

On a pour que $M(a;b)$ soit inversible dans $(E; \times)$

il faut $\frac{a}{a^2-3b^2} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{b}{a^2-3b^2} \in \mathbb{Z}$. 0/1

~~Pour~~ que $\frac{a}{a^2-3b^2} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{b}{a^2-3b^2} \in \mathbb{Z}$

il faut que $|a^2 - 3b^2| = 1$.

Donc $\varphi(M(a;b)) = 1$.

0)

$b=0$

$b=0$