Ministrère de L'Education Nationale
du Préscolaire et des Sports
Académie Régionale d'Education
et de Formation de la Région de l'oriental

وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق

Académie Régionale d'Education et de Formation de la Région de l'oriental

20/20

NIVEAU: 2ème Bac

SERIE OU FILIERE: SC Maths A

Centre Régional des Examens

425382

Note définitive Sur

EXAMEN DU BACCALAUREAT

COMPOSITION DE Mathématique

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature

Exercice 1 : Analyse :

Partie 1 :

1 - a) Montrons que $\forall t \in [0, +\infty[$

$$\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$$

on a $\frac{1}{1+t} - \frac{4}{(2+t)^2}$

$$= \frac{(2+t)^2 - 4(1+t)}{(2+t)^2(1+t)} = \frac{4+t^2+4t-4-4t}{(2+t)^2(1+t)}$$

$$= \frac{t^2}{(2+t)^2(1+t)}$$

on a $t \geq 0$ donc $(2+t)^2 > 0$ et $(1+t) > 0$
et $t^2 \geq 0$

0,5

d'où $\frac{t^2}{(2+t)^2(1+t)} \geq 0$

donc $\frac{1}{1+t} \geq \frac{4}{(2+t)^2}$ $\forall t \geq 0$ (1)

et on a : $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$

$$= \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+t)^2}$$

$$= \frac{2(1+t)-(1+t)^2-1}{2(1+t)^2} = \frac{2+2t-1-t^2-2t-1}{2(1+t)^2}$$

$$= \frac{-t^2}{2(1+t)^2}$$

on a $-t^2 \leq 0$ et $2(1+t)^2 > 0$ donc →

N.B: Il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

$$\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right) \leq 0$$

d'où $\forall t \geq 0 \quad \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$ ②

de ① et ② on a : $\forall t \in [0, +\infty[$

$$\boxed{\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)}$$

b) on a $\forall t \geq 0$

$$\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$$

et soit $x \geq 0$

on a $\int_0^x \frac{4}{(2+t)^2}\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$

. Calcul des intégrales :

on a $\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \frac{(1+t)'}{1+t}\,dt$ 0,5

$$= \left[\ln(|1+t|)\right]_0^x$$

$$= \ln(1+x) \qquad (1+t > 0)$$

et $\int_0^x \frac{4}{(2+t)^2}\,dt = -4\int_0^x -\frac{1}{(2+t)^2}\,dt$

$$= -4\left[\frac{1}{2+t}\right]_0^x$$

$$= \frac{-4}{2+x} + 2$$

$$= \frac{-4+4+2x}{2+x}$$

$$= \frac{2x}{2+x}$$

et on a : $\int_0^x \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+t)^2}\,dt$

$= \int_0^x \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^x$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2}$

$= \frac{x(1+x) - 1 + 1 + x}{2(1+x)} = \frac{x + x^2 + x}{2(1+x)}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x + x^2}{1+x}\right)$

d'où $\forall x \in [0, +\infty[$

$$\boxed{\frac{2x}{2+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)}$$

2) $\forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

on a $\frac{g(x) - 1}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x}$

$= \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

et on a $\forall x \in [0, +\infty[$

$\frac{2x}{2+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

donc $\left(\frac{2x}{2+x} - x\right) \times \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leqslant \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right) - x}{x^2}$

on a $\frac{\frac{2x}{2+x} - x}{x^2} = \frac{2x - x(2+x)}{(2+x)x^2}$

$= \frac{2x - 2x - x^2}{(2+x)(x^2)}$

$= \frac{-x^2}{x^2(2+x)} = -\frac{1}{2+x}$ (1)

Réf. H1

$$\text{et } \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)-x}{x^2} = \frac{\frac{x^2+2x-x(2)(1+x)}{2(1+x)}}{x^2}$$

$$= \frac{x^2+2x-2x-2x^2}{x^2\cdot 2\cdot(1+x)}$$

$$= \frac{-x^2}{x^2(2)(1+x)}$$

$$= \frac{-1}{2(1+x)} \quad (2)$$

0,5

de (1) et (2) on a $\forall x \in]0,+\infty[$

$$-\frac{1}{2+x} \leqslant \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leqslant -\frac{1}{2(1+x)}$$

et on a $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{2+x} = -\frac{1}{2}$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim\limits_{0^+} \frac{g(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$

(limite et ordre)

(voir page suivante.

NIVEAU: 2ème Bac

SERIE OU FILIERE: SC Maths A

Note définitive
Sur.........

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Centre Régional des Examens

COMPOSITION DE Maths

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature ....

Exercice 1 : Partie 2 :

$f(0) = 1 \qquad \forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = g(x) \cdot e^{-x}$

1) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) \cdot e^{-x}$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot e^{-x}$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{xe^{x}}$

on a $\forall x \in [0,+\infty[$

$\frac{2x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

d'où $\frac{2}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

d'où $\frac{2}{(1+x)e^x} \leq \frac{\ln(1+x)}{xe^x} \leq \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x+2}{x+1}\right)}{e^x}$

on a $\lim\limits_{+\infty} \frac{2}{(1+x)e^x} = 0$ (1) car $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} (1+x) = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

et on a: $\lim\limits_{+\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x} = 1$ (Règle du plus haut degré)

et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2e^x} = 0$

d'où $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{x+2}{x+1}}{e^x}\right) = 0$ (2)

de ① et ② on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{xe^x} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

0,5 d'où $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = 0$ au $V(+\infty)$

2) a) Continuité à droite de 0 :

on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \cdot e^{-x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} e^{-x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{e^x}$

on a $\lim\limits_{0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (cours)

et $\lim\limits_{0^+} \frac{1}{e^x} = 1$

0,25 d'où $\lim\limits_{0^+} f(x) = 1 = f(0)$

donc f est continue à droite de 0

2) b.) Vérification :

$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{g(x) e^{-x} - 1}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{xe^x} - 1}{x}$

$= \frac{\ln(1+x) - xe^x}{x^2 e^x}$

$\left(\frac{e^{-x} - 1}{x}\right) g(x) + \frac{g(x) - 1}{x}$

$= \frac{e^{-x} - 1}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x}$

$= \frac{(e^{-x} - 1)\ln(1+x) + \ln(1+x) - x}{x^2}$

$= \frac{e^{-x}\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{\ln(1+x) - xe^x}{x^2 e^x}$

0,25

donc $\dfrac{f(x)-1}{x} = \left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right) g(x) + \left(\dfrac{g(x)-1}{x}\right)$

$\forall x \in]0,+\infty[$

c) Dérivabilité à droite de 0 :

on a $\lim\limits_{0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{f(x)-1}{x}$

et d'après la question précédante :

$= \lim\limits_{0^+} \left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right) g(x) + \left(\dfrac{g(x)-1}{x}\right)$

on a $\lim\limits_{0^+} \dfrac{e^{-x}-1}{x} g(x) = \lim\limits_{0^+} \dfrac{e^{-x}-1}{x} \cdot \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$= \lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} \cdot \dfrac{e^{-x}-1}{-x}$

on a $\lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{0^+} \dfrac{e^{-x}-1}{-x}$

$= \lim\limits_{0^-} \dfrac{e^{t}-1}{t}$ $(t = -x)$

0,5

$= -1$

d'où $\lim\limits_{0^+} \left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right) g(x) = -1$ (1)

et on a d'après la question (2)

$\lim\limits_{0^+} \dfrac{g(x)-1}{x} = -\dfrac{1}{2}$

et par conséquent : $\lim\limits_{0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = -1 - \dfrac{1}{2}$

$= -\dfrac{3}{2} \in \mathbb{R}$

d'où f est dérivable en 0^+ et $f'_d(0) = -\dfrac{3}{2}$

Réf. H1

Royaume du Maroc
Ministrère de L'Education Nationale
du Préscolaire et des Sports
Académie Régionale d'Education
et de Formation de la Région de l'oriental

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق
Académie Régionale d'Education et de Formation de la Région de l'oriental

وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

المستوى : ....
الشعبة أو المسلك : ....

خاص بالمركز الجهوي للإمتحانات

امتحان شهادة البكالوريا

مادة : ....

النقطة النهائية
على ....

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح وتوقيعه : ....

3) on a $\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = g(x).e^{-x}$
$= \dfrac{\ln(1+x)}{xe^{x}}$

0,25

on a $x \longmapsto 1+x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0,+\infty[$
et on a $\forall x \in]0,+\infty[\quad 1+x > 0$; et $x \longmapsto \ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
d'où $x \longmapsto \ln(1+x)$ dérivable sur $]0,+\infty[$ (composé)

et : $x \longmapsto \dfrac{1}{xe^{x}}$ dérivable sur $\mathbb{R}^{*}$ et en particulier sur $]0,+\infty[$ (opérations sur fonctions dérivable)

Donc f st dérivable sur $]0,+\infty[$ (produits de fonctions dérivables)

. Soit $x \in]0,+\infty[$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{xe^{x}}\right)'$$

$$= \frac{\ln(1+x)'\cdot xe^{x} - (xe^{x})'\ln(1+x)}{x^2e^{2x}}$$

$$= \frac{\frac{xe^{x}}{1+x} - (e^{x}+xe^{x})\ln(1+x)}{x^2e^{2x}}$$

$$= \frac{e^{x}\left(\frac{x}{1+x}\right) - (1+x)\ln(1+x)}{x^2e^{2x}}$$

$$= \frac{\frac{x}{1+x} - (1+x)\ln(x)}{x^2e^{x}}$$

Ministrère de L'Education Nationale
du Préscolaire et des Sports
Académie Régionale d'Education
et de Formation de la Région de l'oriental

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق
Académie Régionale d'Education et de Formation de la Région de l'oriental

وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

NIVEAU: 2ème Bac

SERIE OU FILIERE: SC Maths A

Note définitive
Sur.........

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Centre Régional des Examens

COMPOSITION DE Maths

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature

Suite de La question (3) :

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - (1+x)\ln(x)}{x^2 e^x}$$

$$= \frac{x - (1+x)^2 \ln(x)}{(1+x)x^2 e^x}$$

0,5

$$f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(x)}{(1+x)x^2} \cdot e^{-x} \quad (\forall x \in]0,+\infty[$$

4) a) Montrons que: $\frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

càd Montrons que $x - (1+x)^2 \ln(1+x) < 0$
$(x^2(1+x) > 0)$

on a: $\frac{2x}{2+x} - \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{2x(1+x)^2 - x(2+x)}{(1+x)^2(2+x)}$

$$= \frac{2x + 2x^3 + 4x^2 - 2x - x^2}{(1+x)^2(2+x)}$$

$$= \frac{3x^2 + 2x^3}{(1+x)^2(2+x)} > 0 \quad \text{car } x > 0$$

d'où $\frac{2x}{2+x} > \frac{x}{(1+x)^2}$

et on a: $\ln(1+x) \geq \frac{2x}{2+x} > \frac{x}{(1+x)^2}$

d'où $(1+x)^2 \ln(1+x) > x$
$\Longrightarrow x - (1+x)^2 \ln(1+x) < 0$

Donc $\forall x \in]0,+\infty[$ $\boxed{\frac{x - (1+x)^2 \ln(x+1)}{x^2(1+x)} < 0}$ (1)

N.B: Il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Montrons que $\frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} > -\frac{3}{2}$

on a $\frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} + \frac{3}{2}$

$$= \frac{2x - 2(1+x)^2\ln(1+x) + 3x^2(1+x)}{2x^2(1+x)}$$

$$= \frac{(1+x)\left(3x^2 - 2(1+x)\ln(1+x)\right) + 2x}{2x^2(1+x)}$$

et on a : $\ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right) \leq \frac{3x^2}{2(1+x)}$

0,5 d'où $3x^2 - 2(1+x)\ln(1+x) > 0$

et on a $(1+x) > 0$ et $2x > 0$

d'où $\forall x \in]0,+\infty[$

$$\boxed{-\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0}$$

b) on a $\forall x \in]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\, e^{-x}$$

et on a : $-\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

et on a : $-x < 0$

d'où $0 < e^{-x} < 1$

et on a $0 < -\frac{(x-(1+x)^2\ln(1+x))}{x^2(1+x)} < \frac{3}{2}$

d'où $0 < -e^{-x}\cdot\frac{(x-(1+x)^2\ln(1+x))}{x^2(1+x)} < \frac{3}{2}$

0,1 donc $-\frac{3}{2} < \frac{e^{-x}\left(x-(1+x)^2\ln(1+x)\right)}{x^2(1+x)} \leq 0$

d'où $\boxed{-\frac{3}{2} < f'(x) < 0 \quad \forall x \in]0,+\infty[}$

5) a) on a $\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) < 0$

donc f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$
et f continue en 0^+ donc f strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

0,25

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-3/2$	$-$
$f(x)$	1 ↘	0

(Voir page suivante)

Royaume du Maroc
Ministrère de L'Education Nationale
du Préscolaire et des Sports
Académie Régionale d'Education
et de Formation de la Région de l'oriental

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق
Académie Régionale d'Education et de Formation de la Région de l'oriental

وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

المستوى :
الشعبة أو المسلك :

خاص بالمركز الجهوي للإمتحانات

امتحان شهادة البكالوريا

مادة :

النقطة النهائية
على

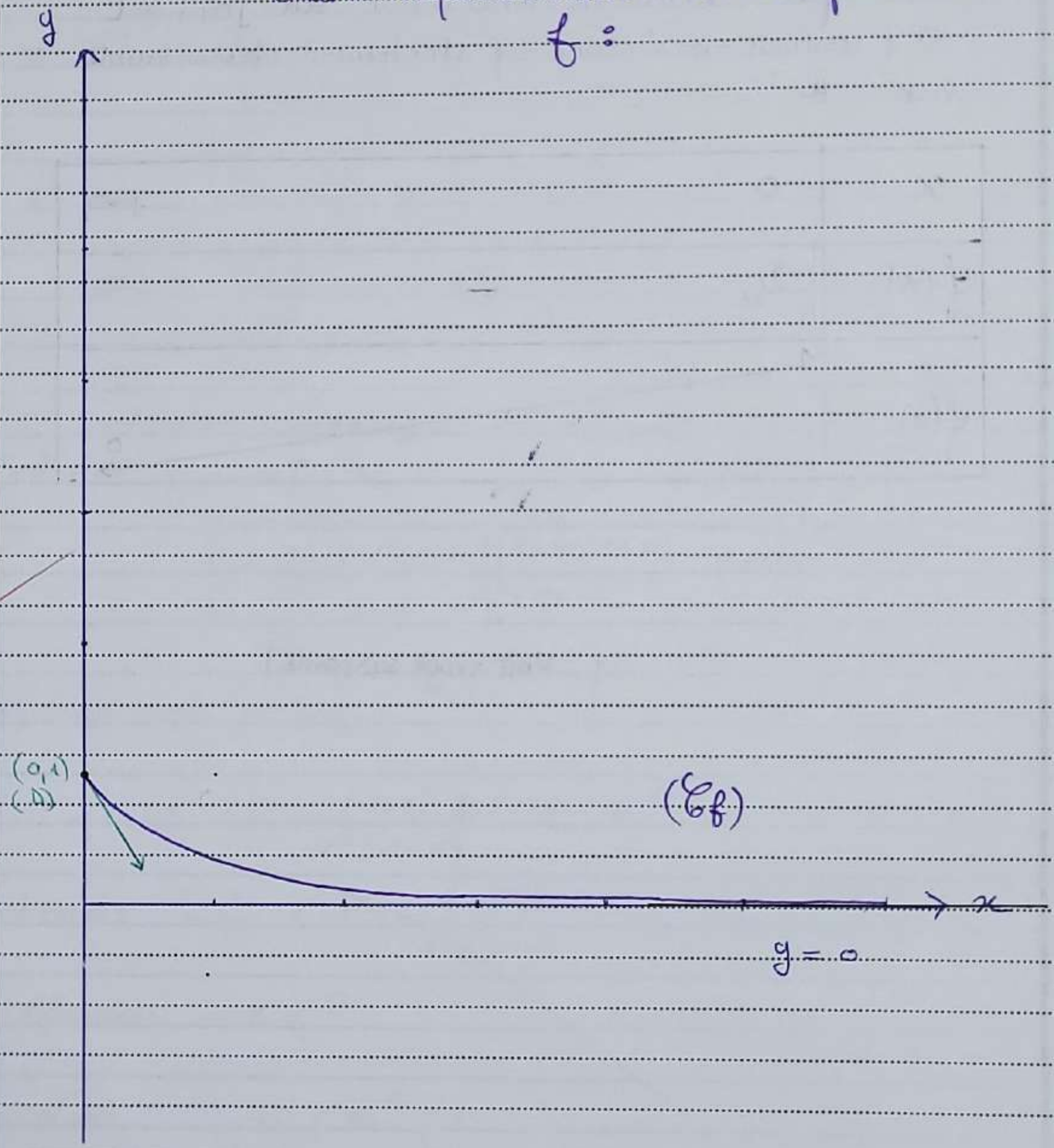
التقدير المفسر للنقطة

اسم المصحح وتوقيعه :

0,75

b)

Courbe représentative de la fonction f :



يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

NIVEAU: 2 ème Bac

SERIE OU FILIERE: SC Maths A

Note définitive
Sur

Réservé au service des Examens

EXAMEN DU BACCALAUREAT

COMPOSITION DE Maths

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature

Partie III :

1) Soit La fonction définie sur $]0,+\infty[$
par $\varphi(x) = f(x) - 3x$
on a f est une fonction strictement décroissante
et on a $x \mapsto -3x$ est une fonction linéaire strictement décroissante (usuelle)
Donc φ est strictement décroissante (La somme de 2 fcts décroissante est décroissante)

et on a f est continue sur $]0,+\infty[$ (Partie II)
et $x \mapsto 3x$ continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier ($]0,+\infty[$)
(Restriction de polynôme)
D'où φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
Donc φ est bijective de $]0,+\infty[$ vers $\varphi(]0,+\infty[)$

0,5

$=]\lim_{+\infty} \varphi(x) ; \lim_{0^+} \varphi(x)[$

on a $\lim_{+\infty} \varphi(x) = \lim_{+\infty} f(x) - \lim_{+\infty} 3x = -\infty$

et $\lim_{0^+} \varphi(x) = f(0) - 0 = 1$

d'où φ bijective de $]0,+\infty[$ vers $]-\infty, 1[$
et $0 \in]-\infty, 1[$ d'où il a un antécédant unique
Donc $\exists! \alpha \in]0,+\infty[\ / \ \varphi(\alpha) = 0$
$\iff f(\alpha) = 3\alpha$

2) a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \ U_n \geq 0$
pour $n = 0$ on a $U_0 = \beta \in \mathbb{R}^+$ donc $U_0 \geq 0$
. Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $U_n \geq 0$
et Mq $U_{n+1} \geq 0$

on a $U_n \geq 0$

d'où $U_n \in [0, +\infty[$

et on a $f([0,+\infty[) =]0, 1]$

d'où $\forall x \in [0, +\infty[\quad f(x) > 0$ 01

d'où $f(U_n) > 0$

$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3} f(U_n) \geq 0$

donc $U_{n+1} \geq 0$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 0$

b) on a d'après la question : Partie 2 (4-b)

$\forall x \in]0, +\infty[\quad -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

d'où $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3} f'(x) < 0 < \frac{1}{2}$

d'où $\left| \left(\frac{1}{3} f(x) \right)' \right| \leqslant \frac{1}{2}$
sur $[0, +\infty[$

et on a $\frac{1}{3} f$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

D'après l'inégalité des accroissements finis

$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ 01

$$\left| \frac{1}{3} f(x) - \frac{1}{3} f(y) \right| \leqslant \frac{1}{2} |x - y|$$

pour $x = U_n$ et $y = \alpha$

on a $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

$\left(\text{car } f(\alpha) = 3\alpha \Longrightarrow \frac{1}{3} f(\alpha) = \alpha \right)$

c) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$

pour $n = 0$ on a $|U_0 - \alpha| = |\beta - \alpha| \leqslant |\beta - \alpha|$

Soit $n \in \mathbb{N}$;
supposons que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$
et M.q
$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |\beta - \alpha|$$
on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

et $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$

0,1 ✓

d'où $\frac{1}{2} |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |\beta - \alpha|$

Donc $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |\beta - \alpha|$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$

d) Déduction de Limite :

on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

et on a $|\beta - \alpha| \geq 0$ et $\in \mathbb{R}$

d'où $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |\beta - \alpha| = 0$

0,1 ✓

D'après les critères de convergence ;

$\lim\limits_{+\infty} U_n = \alpha \in \mathbb{R}$

Donc (U_n) est convergente

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION DE L'ORIENTAL

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

NIVEAU: 2ème Bac

SERIE OU FILIERE: S. Math A

Réservé au service des Examens

Note définitive
Sur.........

EXAMEN DU BACCALAUREAT

COMPOSITION DE Maths.

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature ....

Exercice 2: analyse:

1)a) Soit la fonction $x \mapsto e^x$ noté : $\varphi(x)$.

on a φ est st continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

et φ dérivable sur $\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$

D'après le T.A.F

$\exists c_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tel que $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) e^{c_k}$

0,5

$\boxed{\text{donc } e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}.}$

1)b) on a : La distance entre deux points du plan $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ est : $d = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$

d'où $\forall k \in \{0,1,\dots\dots(n-1)\}$

$$M_k M_{k+1} = \sqrt{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)^2 + \left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} e^{2c_k}}$$

0,25

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(1+e^{2c_k}\right)} = \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$$

1-c) on a $M_k M_{k+1} = \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

on a : $\frac{k}{n} < c_k < \frac{k+1}{n}$

$$\Rightarrow e^{2\frac{k}{n}} < e^{2c_k} < e^{2\left(\frac{k+1}{n}\right)}$$

N.B: Il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Donc :

$$\sqrt{1+e^{2\frac{k}{n}}} \leqslant \sqrt{1+e^{2ck}} \leqslant \sqrt{1+e^{2\frac{k+1}{n}}}$$

0,5 d'où $\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2\frac{k}{n}}} \leqslant M_kM_{k+1} \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2\frac{k+1}{n}}}$

$(\forall k \in \{0,1,\ldots,(n-1)\})$

2) on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \sum_{0}^{n-1} M_kM_{k+1}$$

$$= M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \ldots + M_{n-1}M_n$$

et on a $\forall k \in \{0,1,\ldots(n-1)\}$

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2\frac{k}{n}}} \leqslant M_kM_{k+1} \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

d'où $\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2\times 0}{n}}} \leqslant M_0M_1 \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2}{n}}}$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(n-1)}{n}}} \leqslant M_{n-1}M_n \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2\frac{n}{n}}}$$

en additionnant terme à terme :

0,5 on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}\sqrt{1+e^{2\frac{k}{n}}} \leqslant M_0M_1+M_1M_2+M_2M_3+\ldots+M_{n-1}M_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}\sqrt{1+e^{2\frac{k+1}{n}}}$$

et $\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}\sqrt{1+e^{2\frac{k+1}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

b) Vérification de Limite de S_n :

Soit la fonction $u(x) = \sqrt{1+e^{2x}}$

on a $x \longmapsto 1+e^{2x}$ continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $1+e^{2x} > 0$

d'où u dérivable sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$

on a $\frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$ et $\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

sont des somme de Reihmann

car :

$$\frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} \sqrt{1+e^{2\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} u\left(\frac{k}{n}\right)$$

et de même $\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \sqrt{1+\frac{e^{2k}}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} u\left(\frac{k}{n}\right)$

d'où $\ell_{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} = \ell_{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

01,5

$$= \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\, dx$$

et d'après les critères de convergence :

$$\boxed{\lim_{+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\, dx}$$

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION DE L'ORIENTAL

وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

NIVEAU: 2ème Bac

SERIE OU FILIERE: SC Maths A

Réservé au service des Examens

Note définitive
Sur.........

EXAMEN DU BACCALAUREAT

COMPOSITION DE Maths

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature ....

Exercice 3: Les nombres Complexes:

$u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$

1)a)

$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

0,5

$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\pi/3}$

1-b) $\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^{i(\pi/3 - \pi/4)}$

0,25

$$\boxed{\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\pi/12}}$$

$\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}\right)$

1-c) on a $e^{i\pi/12} = \frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}i - i + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)i$

d'où $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

0,25

d'où $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}}$$

N.B: Il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

1_d) Mq $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}}$

ona d'après La question précédante

$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

d'où $(\sqrt{6} - \sqrt{2})\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$ 01

$= \frac{\sqrt{3}.(1+\sqrt{3})}{2} + i\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} i$

$= \frac{\cancel{\sqrt{3}} + 3 - 1 - \sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1}{2}\right)$

$= 1 + i(2 - \sqrt{3})$

2)a) ona pour $n = 0$

$x_0 + iy_0 = 1 = u^0 = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $x_n + iy_n = u^n$

et Mq $x_{n+1} + iy_{n+1} = u^{n+1}$

$x_{n+1} + iy_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n + i(y_n) + i(x_n)(2-\sqrt{3})$

$= x_n + iy_n + (2-\sqrt{3})i \times (x_n + iy_n)$

$= (x_n + iy_n)(1 + (2-\sqrt{3})i)$

$= u^n . u$ 01

$= u^{n+1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{x_n + iy_n = u^n}$

2_b) on a $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

on a: $x_n + iy_n = u^n$
$= (\sqrt{6}-\sqrt{2})^n \cdot e^{i\frac{n\pi}{12}}$

et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$= \frac{6-2}{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

d'où $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^n = \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}\right)^n$

01 ✓

d'où
$x_n + iy_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n} + i\,\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}$

d'où : $\boxed{x_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^n}}$ et $\boxed{y_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}}$

3) O, A_0, A_n sont alignés
$\Leftrightarrow \frac{u^n - 0}{u^0 - 0} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow u^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n} + i\,\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^n} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^n} = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{12} = k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{n}{12} = k \in \mathbb{Z}$

Réf. H1

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION DE L'ORIENTAL

وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المستوى : ....

الشعبة أو المسلك : ....

خاص بمصلحة الإمتحانات

امتحان شهادة البكالوريا

النقطة النهائية
على ....

مادة : ....

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح وتوقيعه : ....

Dans l'ensemble des entiers n est

$E = \{n \ / \ n \equiv 0 \ [12]\}$

0,1

6) on a : $\frac{u^{n+1} - u^n}{0 - u^n} = \frac{u^n(u-1)}{u^n}$

$= u - 1 = (2-\sqrt{3})\, i$

$= (2-\sqrt{3})\, e^{i\pi/2}$

donc $\arg\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{0 - u^n}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

d'où $(\overrightarrow{A_nO}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

0,1

Donc OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION DE L'ORIENTAL

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

NIVEAU: 2eme Bac

SERIE OU FILIERE: SC Maths A

Note définitive
Sur..........

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Réservé au service des Examens

COMPOSITION DE Maths.

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature ....

Exercice 4 : arithmétique :

1) a) on a p st premier et p impair
donc $p \wedge 2 = 1$
d'aprés le théoreme de Fermat
0,25

$$2^{p-1} \equiv 1 [p]$$

1) b) on a $p-1$ st pair (p impair)

d'où $2^{p-1} = (2^2)^{\frac{p-1}{2}} = (2^{\frac{p-1}{2}})^2$

on a $2^{p-1} \equiv 1 [p]$
2,25

$\Leftrightarrow (2^{\frac{p-1}{2}})^2 - 1^2 \equiv 0 [p]$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 [p]$ (car p impair)

$\Leftrightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$

2) a) on suppose que $p \wedge x \neq 1$
et p premier donc $p \wedge x = |p|$
d'où $p | x$
0,5
$\Rightarrow x \equiv 0 [p]$
$\Rightarrow x^2 \equiv 0 [p]$
et on a $x^2 \equiv 2 [p]$
donc $2 \equiv 0 [p] \Rightarrow p | 2$ ce qui st absurde
d'où $p \wedge x = 1$

N.B: Il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

$x \wedge p = 1$ et p premier

b) on a d'après le théorème de Fermat :

$$x^{p-1} \equiv 1\,[p] \Longrightarrow (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\,[p]$$

et on a $x^2 \equiv 2\,[p]$

$\Longrightarrow (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}}\,[p]$

$\Longrightarrow \boxed{2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\,[p]}$

0,5

3) on a $k.C_p^k = p.C_{p-1}^{k-1}$

d'où $p \mid k.C_p^k$

0,25

et on a $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$

donc $k < p$ d'où $k \wedge p = 1$ (p premier)

d'où : d'après GAUSS : $p \mid C_p^k$

4-a) on a $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

0,25

donc $(1+i)^p = (\sqrt{2})^p . e^{i\frac{p\pi}{4}}$

$= 2^{\frac{p}{2}}\left(\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{p\pi}{4}\right)\right)$

$$\boxed{(1+i)^p = 2^{p/2}\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i\,2^{p/2}\sin\left(\frac{p\pi}{4}\right)}$$

b) on a $(1+i)^p = 2^{p/2}\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i\,2^{p/2}\sin\left(\frac{p\pi}{4}\right)$

$= \sum_{0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k . C_p^{2k} + i\sum_{0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1) . C_p^{2k+1}$

d'où $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) = \sum_{0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k . C_p^{2k} \in \mathbb{Z}$

(car $C_p^k \in \mathbb{Z}$) (somme de termes entiers relatifs) d'où $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$

et : $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) = \sum_{0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{k} C_p^{2k}$

$= C_p^0 - C_p^2 + C_p^4 - C_p^6 + \dots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} C_p^{p-1}$

$= 1 - C_p^2 + C_p^4 - C_p^6 + \dots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} C_p^{p-1}$

on a d'après 3 : $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\} \quad p \mid C_p^k$

donc $p \mid C_p^2$ et $p \mid C_p^4$ et ...... $p \mid (-1)^{\frac{p-1}{2}} C_p^{p-1}$

d'où $-C_p^2 + C_p^4 - C_p^6 + \dots + C_p^{p-1} \times (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 [p]$

d'où $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) - 1 \equiv 0 [p]$

d'où $\boxed{2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \equiv 1 [p]}$ 0.1

5) si $p \equiv 5 [8]$

on a : $p = 8k + 5$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)

d'où $p\frac{\pi}{4} = (8k+5) \times \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$

d'où $\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right)$ (fcts périodiques)

$= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $-2^{\frac{p}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \equiv 1 [p]$

$\Rightarrow -2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$

$\Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$

on suppose que (E) admet des solution dans $\mathbb{Z}$

donc : x une solution.

d'où $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ (2)b)

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION DE L'ORIENTAL

وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المستوى :
الشعبة أو المسلك :

خاص بمصلحة الإمتحانات

امتحان شهادة البكالوريا

مادة :

النقطة النهائية
على

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح وتوقيعه :

or $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$

0,5

d'où $1 \equiv -1 [p] \Rightarrow p \mid 2$
ce qui est absurde.
D'où l'équation (E) n'a pas de solution
si $p \equiv 5 [8]$

يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION DE L'ORIENTAL

NIVEAU: 2 eme Bac

SERIE OU FILIERE: SC Maths A

Réservé au service des Examens

Note définitive
Sur........

EXAMEN DU BACCALAUREAT

COMPOSITION DE Maths

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature ....

Suite exercice : structure.

on a $x+y\sqrt{3} \times \frac{1}{x'+y'\sqrt{3}} = \frac{xx'-3yy'}{x'^2-3y'^2} + \sqrt{3}\left(\frac{x'y-xy'}{x'^2-3y'^2}\right) \in F.$

on a $(x, x', y', y) \in \mathbb{Q}^4$

d'où $\frac{xx'-3yy'}{x'^2-3y'^2} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{x'y-xy'}{x'^2-3y'^2} \in \mathbb{Q}$

0,25

et $xx'-3yy' \neq 0$ et $x'y-xy' \neq 0$

d'où $F-\{0\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$

3) a) on a Soit $(x,y) \in \mathbb{Q}^2-\{(0,0)\}$
$\varphi(x+y\sqrt{3}) = M(x,y)$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$
$\in G-\{0\}$

donc $\varphi(F-\{0\}) \subset G-\{0\}$

et on a: $\forall M(x,y) \in G-\{0\}\ \exists (x,y) \in \mathbb{Q}^2-\{(0,0)\}$
tel que $\varphi(x+y\sqrt{3}) = M(x,y)$

0,25

Donc $G-\{0\} \subset \varphi(F-\{0\})$

et par conséquent $\varphi(F-\{0\}) \subset G-\{0\}$

b) Soit $(x,y), (x',y') \in \mathbb{Q}^2-\{(0,0)\}$

on a $\varphi((x+y\sqrt{3}) \times (x'+y'\sqrt{3}))$

0,25

$= \varphi(xx'+(xy'+x'y)\sqrt{3}+3yy')$

$= M(xx'+3yy' ; xy'+x'y)$

N.B: Il est interdit au candidat de signer sa composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

$= M(x,y) \times M(x',y')$ (3) a)

d'où φ st un homomorphisme de $(F-\{0\}, \times)$ vers $(E, \times)$

c) on a $F-\{0\}$ sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ qui st grp abélien.
donc $(F-\{0\}, \times)$ st un groupe commutatif

0,2 et φ st un homomorphisme de $(F-\{0\}, \times)$ vers $(E, \times)$
et $\varphi(F-\{0\}) = G-\{0\}$

d'où $(\varphi(F-\{0\}), \times)$ est un groupe commutatif

càd: $(G-\{0\}, \times)$ st un groupe commutatif

4) on a $(G-\{0\}, \times)$ st un groupe commutatif
et $\times$ distributive / $+$ dans $G-\{0\}$

et on a: $(G, +)$ st un groupe commutatif (sous groupe de $(E, +)$)

Donc $(G, +, \times)$ st un corps commutatif.

0,2 Justification: on a $G \neq \emptyset$ et $G \subset E$

et soit $M(a,b)$; $M(a',b') \in G$

on a $M(a,b) - M(a',b') = M(a-a', b-b') \in G$
car $a - a' \in \mathbb{Q}$
et $b - b' \in \mathbb{Q}$

Donc G st un s.g du groupe commutatif $(E, +)$

d'où $(G, +)$ st un groupe commutatif.

NIVEAU: 2 eme Bac

SERIE OU FILIERE: SC Maths A

Réservé au service des Examens

Note définitive
Sur

EXAMEN DU BACCALAUREAT

COMPOSITION DE Maths

Appréciations expliquant la note chiffrée

Nom du correcteur et signature

Exercice 5: Structure algébrique:

Partie I:

1) Montrons que E est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

on a $M(0,0) = 0 \in E$

donc $E \neq \emptyset$

et on a $\forall M(x,y) \in E$; $M(x,y) \in M_2(\mathbb{R})$

01 donc $E \subset M_2(\mathbb{R})$.

. Soit $M(x,y)$ et $M(x',y') \in E \times E$

Montrons que $M(x,y) - M(x',y') \in E$

on a $M(x,y) - M(x',y') = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x'-y' & -y' \\ -2y' & -x'+y' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (x-x')+(y-y') & y-y' \\ 2(y-y') & (x-x')-(y-y') \end{pmatrix}$

$= M(x-x' ; y-y') \in E$

car $\begin{cases} x-x' \in \mathbb{R} \\ y-y' \in \mathbb{R} \end{cases}$

d'où E est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2) Montrons que E st un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

on a $E \neq \emptyset$ et $E \subset M_2(\mathbb{R})$

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $M(a,b)$ et $M(a',b')$ des éléments de E.

Mq $\alpha M(a,b) + \beta M(a',b') \in E$

0,25

on a $\alpha M(a,b) + \beta M(a',b') = \begin{pmatrix} \alpha a+\alpha b & \alpha b \\ 2\alpha b & \alpha a-\alpha b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a'+\beta b' & \beta b' \\ 2\beta b' & \beta a'-\beta b' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha a+\beta a'+\beta b'+\alpha b & \alpha b+\beta b' \\ 2\alpha b+2\beta b' & \beta a'+\alpha a-(\alpha b+\beta b') \end{pmatrix}$

$= M(\alpha a+\beta a' ; \beta b'+\alpha b) \in E$

car $\begin{cases} \alpha a+\beta a' \in \mathbb{R} \\ \beta b'+\alpha b \in \mathbb{R} \end{cases}$

Donc E st un sous space vectoriel réel de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

0,25

3) a) $M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} xx'+xy'+yx'+yy'+2yy' & xy'+yy'+yx'-yy' \\ 2x'y+2yy'+2xy'-2yy' & 2yy'+xx'-xy'-yx'+yy' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (xx'+3yy')+(xy'+yx') & xy'+yx' \\ 2(xy'+yx') & xx'+3yy'-(xy'+yx') \end{pmatrix}$

$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'+3yy' ; xy'+yx')$

b) on a $(E, +, \cdot)$ st un espace vectoriel
donc $(E, +)$ est un groupe commutatif ①

et on a $\forall M(x,y) ; M(x',y') \in E \quad M(x,y) \times M(x',y') \in E$
d'où E st stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ ②
et $\times$ st associative et distributive par rapport à $+$ dans $M_2(\mathbb{R})$; donc $\times$ st associative et distributive par rapport à $+$ ③
dans E

et on a $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ st l'élément neutre dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1,0) \in E$
Donc I st aussi l'élèment neutre dans E.

et on a : $M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' + 3yy' \,;\, xy' + yx')$

$= M(x'.x + 3y'.y \,;\, y'x + x'y)$

0,1 $= M(x',y') \times M(x,y)$

donc $\times$ st commutative dans E (4)

de (1), (2), (3) et (4) $(E, +, \times)$ st un anneau commutatif unitaire.

4) a) $M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1)$

$= M\left((\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) + 3(1) \times (1) \,;\, \sqrt{3} \times 1 + (-\sqrt{3}) \times 1\right)$

0,2 $= M(-3 + 3 \,;\, \sqrt{3} - \sqrt{3}) = M(0,0)$
$= 0$

b) on suppose que $(E, +, \times)$ st un corps
Donc $(E, +, \times)$ st intègre
donc il n'admet aucun diviseur de 0
or : $M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = 0$ et $\begin{cases} M(\sqrt{3}, 1) \neq 0 \\ M(-\sqrt{3}, 1) \neq 0 \end{cases}$

0,2 Donc cè sont ds diviseurs de 0
ce qui st absurde
Par conséquent $(E, +, \times)$ n'st pas un corps

Partie II :

1) Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad x + y\sqrt{3} = 0 \iff x = 0$ et $y = 0$

$\Leftarrow)$ $x = 0$ et $y = 0 \implies x + y\sqrt{3} = 0$ (1)
$\Rightarrow)$ $x + y\sqrt{3} = 0 \implies x = -y\sqrt{3}$
on suppose que $x \neq 0$ et $-y\sqrt{3} \neq 0$

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشرق
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION DE L'ORIENTAL

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

المستوى :
الشعبة أو المسلك :

خاص بمصلحة الإمتحانات

امتحان شهادة البكالوريا

مادة :

النقطة النهائية
على

التقدير المفسر للنقطة

إسم المصحح وتوقيعه :

on a $x \in \mathbb{Q}$ donc $-y\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$
donc $y\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$
et on a $y \in \mathbb{Q}$ d'où $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$
tel que $y = \frac{p}{q}$

0,25

d'où $\frac{p.\sqrt{3}}{q} \in \mathbb{Q}$

donc $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ ce qui est abcurde

d'où $x + \sqrt{3}y = 0 \Longrightarrow x = 0$ et $y = 0$ (2)
de (1) et (2) on a :
$x + \sqrt{3}y = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ et $y = 0$

2) . on a $F - \{0\} \neq \emptyset$ car $1 \in F$
et on a $\forall (x,y) \in F - \{0\}$ $x + y\sqrt{3} \in \mathbb{R}^*$
Donc $F - \{0\} \subset \mathbb{R}^*$

. soit $(x,y) ; (x',y') \in \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2$

$$x + y\sqrt{3} \times \frac{1}{x' + y'\sqrt{3}} = \frac{x + y\sqrt{3}}{x' + y'\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(x + y\sqrt{3})(x' - y'\sqrt{3})}{x'^2 3y'^2}$$
$$= \frac{xx' - xy'\sqrt{3} + x'y\sqrt{3} - 3yy'}{x'^2 - 3y'^2}$$
$$= \frac{xx' - 3yy'}{x'^2 - 3y'^2} + \sqrt{3}\left(\frac{x'y - xy'}{x'^2 - 3y'^2}\right)$$

يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله