EXAMEN D'OBTENTION DU CERTIFICAT DU BACCALAUREAT

Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale du Préscolaire et des Sports

Série ou Option : ....

Date d'examen : ....

Matière de : ....

Numéro d'archivage 499/04

Nom et Signature du correcteur : Ould lmjeidane

Note globale	
En chiffres	20,00 /20
En lettres	

NOTATION PARTIELLE

EXERCICE : 3

Partie I :

1) soit $\alpha \in \mathbb{C}$

a- soit Δ_α le discriminant de (E_α) :

$$\Delta_\alpha = (2i)^2 - 4\alpha$$

$$= -4 - 4\alpha$$

$$\Delta_\alpha = -4(1+\alpha)$$

0,25

b- soit $\alpha \in \mathbb{C}$

pour que l'équation admet deux solutions distincts dans $\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow -4(1+\alpha) \neq 0$

Supp : que $-4(1+\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow (1+\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = -1$

0,25

donc : (E_α) admet deux solutions distincts $\Leftrightarrow \alpha \neq -1$

2)

~~soient z_1 et z_2 les deux solutions de (E_α)~~

~~donc $z_1 + z_2 = 2i$~~

~~et $z_1 \times z_2 = \alpha$~~

Partie II

1)

a- soit $m \in \mathbb{R}$ t.q $\alpha = m^2 - 2m$

On a $\Delta_\alpha = -4(1+\alpha)$

$\Rightarrow \Delta_\alpha = -4(1+m^2-2m)$

$\Rightarrow \Delta_\alpha = -4(m-1)^2$

$\Rightarrow \Delta_\alpha = [2i(m-1)]^2$

0,5

donc : $z_1 = \frac{2i - 2i(m-1)}{2} = i - i(m-1) = -im + 2i$

$z_2 = \frac{2i + 2i(m-1)}{2} = i + i(m-1) = im$

b- soit $m \in \mathbb{R}^*$

On a : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-im+2i}{im} = -1 + \frac{2}{m}$

comme $(m \in \mathbb{R}^*)$ $-1 + \frac{2}{m} \in \mathbb{R}$

donc $\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \in \mathbb{R}$

0,25

par conséquent :

les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

TOTAL NOTE/PAGE 1,25

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

NOTATION PARTIELLE

2)

a- soit $m \in \mathbb{R}$

On a $\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\overline{\frac{z_1}{z_2}}$

$\Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0$

$\Leftrightarrow (-im+2i)\times\overline{im} + im(\overline{-im+2i}) = 0$

$\Leftrightarrow (-im+2i)(-im) + im(im-2i) = 0$

$\Leftrightarrow -m^2+2m - m^2 + 2m = 0$

$\Leftrightarrow -2m^2+4m = 0$

$\Leftrightarrow -m^2+2m = 0$

$\Leftrightarrow (im)^2 - 2i(im) = 0$

$\Leftrightarrow im(im-2i) = 0$

$\Leftrightarrow -im(-im+2i) = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z_2}z_1 = 0$

$\Leftrightarrow Re(\overline{z_2}z_1) = 0$.

0,25

b-

soit $m \in \mathbb{R}$

On a: $|z_1+z_2|^2 - 4Re(z_1\overline{z_2})$

$= |2i|^2 - 4(-m^2+2m)$

$= 4 - 4(-m^2+2m)$

$= 4(m^2-2m+1)$

$= 4(m-1)^2$.

$= |2i|^2|m-1|^2$

$= |2i(m-1)|^2$

$= |2im - 2i|^2$

$= |im + im - 2i|^2$

$= |im - (-im+2i)|^2 = |z_1 - z_2|^2$

0,5

b)

On a $\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z\overline{z_2}) = 0$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1+z_2|^2$

$\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2 = |2i|^2$

$\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2 = 4$

$\Leftrightarrow |z_1-z_2| = 2$ ou $|z_1-z_2| = -2$

Comme $\forall z \in \mathbb{C}: |z| \in \mathbb{R}_+$

donc: $|z_1-z_2| = 2$

d'où $\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z_1-z_2| = 2$

0,5

3)

a-

0,2

On a: $(z_1-z_2)^2 = (-im+2i+im)^2 = (-2im+2i)^2 = (2i)^2(-m+1)^2$

$= (2i)^2(m-1)^2 = [(2i)(m-1)]^2 = \Delta$

TOTAL NOTE/PAGE 1,5

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale du Préscolaire et des Sports

EXAMEN D'OBTENTION DU CERTIFICAT DU BACCALAUREAT

Série ou Option : ....

Date d'examen : ....

Matière de : ....

Numéro d'archivage

Nom et Signature du correcteur : ....

Note globale	
En chiffres	....../20
En lettres	....

NOTATION PARTIELLE

Exercice 5 :

1) a-

On a : p et q deux nombre premier et r un entier naturel tels que : $p \wedge r = 1$ et $q \wedge r = 1$.

donc d'après Fermat petit :

$r^{q-1} \equiv 1 [q]$ et $r^{p-1} \equiv 1 [p]$

0,5

d'où

$r^{(q-1)} - 1 \equiv 0 [q]$ et $r^{(p-1)} - 1 \equiv 0 [p]$

0,5

d'où q divise $r^{(q-1)} - 1$ et p divise $r^{(p-1)} - 1$

c-

On a : $\begin{cases} p \text{ divise } r^{(p-1)(q-1)} - 1 \\ q \text{ divise } r^{(p-1)(q-1)} - 1 \\ q \text{ et } p \text{ deux nombres premiers} \end{cases}$

0,5

donc pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

b-

On a : $p \mid r^{(p-1)} - 1$ et $q \mid r^{(q-1)} - 1$

donc

$r^{(p-1)} \equiv 1 [p]$ et $r^{(q-1)} \equiv 1 [q]$

donc :

$(r^{(p-1)})^{q-1} \equiv 1^{q-1} [p]$ et $(r^{(q-1)})^{p-1} \equiv 1^{p-1} [q]$

0,1

car p, q premiers

$\Rightarrow p > 1$ et $q > 1$

$\Rightarrow p-1 > 0$ et $q-1 > 0$

d'où

$r^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [p]$ et $r^{(q-1)(p-1)} \equiv 1 [q]$

d'où $r^{(p-1)(q-1)} - 1 \equiv 0 [p]$ et $r^{(p-1)(q-1)} - 1 \equiv 0 [q]$

donc

p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

2) pour $(r, p, q) = (2024, 13, 17)$

TOTAL NOTE/PAGE

2

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

NOTATION PARTIELLE

On a: 2024 est un entier naturel

13 et 17 des nombre premiers

et $\begin{cases} 2024 \wedge 13 = 1 & \text{car } 13 \nmid 2024 \\ 2024 \wedge 17 = 1 & \text{et } 17 \nmid 2024 \end{cases}$

d'où d'après les résultat précédants

17×13 divise $2024^{(17-1)(13-1)} - 1$

$\Rightarrow 221$ divise $2024^{192} - 1$

$\Rightarrow 2024^{192} - 1 \equiv 0\,[221]$

$\Rightarrow 2024^{192} \equiv 1\,[221]$

soit

(S') l'ensemble de solut° de l'equation : $2024^{192}x \equiv 3\,[221]$

On a: $x \in S' \Rightarrow 2024^{192}x \equiv 3\,[221]$

et On a $2024^{192} \equiv 1\,[221]$

$\Rightarrow \begin{cases} 2024^{192}x \equiv 3\,[221] \\ 2024^{192}x \equiv x\,[221] \end{cases}$

donc : $\Rightarrow x \equiv 3\,[221]$.

$\Rightarrow 221$ divise $x - 3$

$\Rightarrow x = 221K + 3$ avec $K \in \mathbb{Z}$

d'où $x \in \{221K + 3 \mid K \in \mathbb{Z}\}$

alors

$S' \subset \{221K + 3 \mid K \in \mathbb{Z}\}$

soit $K \in \mathbb{Z}$ tq $x = 221K + 3$.

On a :

$2024^{192} \times (221K + 3) = 221K \times 2024^{192} + 2024^{192} \times 3$

On a :

$221K \times 2024^{192} \equiv 0\,[221]$ car $221 \mid 221K \times 2024^{192}$

et On a

$2024^{192} \equiv 1\,[221]$

$\Rightarrow 2024^{192} \times 3 \equiv 3\,[221]$.

d'où :

$221K \times 2024^{192} + 2024^{192} \times 3 \equiv 3\,[221]$

$\Rightarrow 2024^{192}(221K + 3) \equiv 3\,[221]$

$\Rightarrow 2024^{192}x \equiv 3\,[221]$

$\Rightarrow x \in S'$

alors : $\{221K + 3 \mid K \in \mathbb{Z}\} \subset S'$

On a :

$\begin{cases} \{221K + 3 \mid K \in \mathbb{Z}\} \subset S' \\ S' \subset \{221K + 3 \mid K \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

d'où :

$S' = \{221K + 3 \mid K \in \mathbb{Z}\}$

TOTAL NOTE/PAGE

1

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale du Préscolaire et des Sports

EXAMEN D'OBTENTION DU CERTIFICAT DU BACCALAUREAT

Série ou Option : ....

Date d'examen : ....

Matière de : ....

Numéro d'archivage

Nom et Signature du correcteur : ....

Note globale	
En chiffres	....../20
En lettres	....

NOTATION PARTIELLE

c-

On a $\lim_{t\to 0^+} \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})} = -\frac{1}{2}$ car $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{t}} = 1$

donc d'après le théorème de gendarmes

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} = -\frac{1}{2}$$

0,25

alors on pose $t=(x-1)^2$; $\lim_{t\to 0^+} (x-1)^2 = 1^+$

d'où

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

4)

a- soit $x \in]1,+\infty[$

On a $\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{\frac{\ln(x)}{x^2-1}-\frac{1}{2}}{(x-1)}$

$$= \frac{2\ln(x)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x-1)}$$

et On a

$$-\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$$

$$= \frac{-\ln(x)}{2(x^2-1)} + \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$$

0,5

$$= \frac{-\ln(x)(x-1)^2+(\ln(x)-x+1)(x^2-1)}{2(x^2-1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{-\cancel{\ln(x)x^2}+2x\ln(x)-\ln(x)+\cancel{\ln(x)x^2}-\ln(x)-x^3+x+x^2-1}{2(x^2-1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x\ln(x)-2\ln(x)-(x^3-x^2-x-1)}{2(x^2-1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{2\ln(x)(x-1)-(x^2(x-1)-(x-1))}{2(x^2-1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(2\ln(x)-(x^2-1))}{2(x^2-1)(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{2\ln(x)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x-1)}$$

$$= \frac{2\ln(x)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x-1)}$$

TOTAL NOTE/PAGE

0,75

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

NOTATION PARTIELLE

Donc $\forall x \in]1,+\infty[$:

$$\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$$

b– On a :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$$

$$= -1 \times \frac{1}{2(2)} + \left(\frac{-1}{2}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-1}{4} - \frac{1}{4}$$

0,25

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{-1}{2}$$

car $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ et $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{4}$

donc f dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = \frac{-1}{4}$

$\Rightarrow$ $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi tangente en point d'abscisse 1 d'équat°

$(T)_1 : y = f'_d(1)(x-1) + f(1)$

$y = -\frac{1}{4}(x-1) + f(1)$

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$(T) : y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

0,25

5–

a– soit $x \in [1,+\infty[$

et $t \in [1,x]$

On a : $t \geq 1$

$\Rightarrow$ $t^2 - 1 \geq 0$ et $t^3 \geq t^2$

$\Rightarrow$ $t^2 - 1 \geq 0$ et $\frac{1}{t^3} \leq \frac{1}{t^2}$

alors :

$$\frac{t^2-1}{t^2} \geq \frac{t^2-1}{t^3} \geq 0$$

0,5

donc

$$0 \leq \frac{t^2-1}{t^3} \leq \frac{t^2-1}{t^2}$$

d'où

$$0 \leq \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}\,dt \leq \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2}\,dt$$

d'où : $0 \leq I(x) \leq J(x)$

b.

soit $t \in [1,x]$ et $x \in [1,+\infty[$.

On a :

$$I(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}\,dt = \int_1^x \frac{t^2}{t^3} - \frac{1}{t^3}\,dt$$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt - \int_1^x \frac{1}{t^3}\,dt$$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt - \int_1^x \left(\frac{t^{-2}}{-2}\right)'dt$$

TOTAL NOTE/PAGE 1

alors: $\frac{2}{(x+1)^2} \leq \frac{2}{4}$

$\Rightarrow$

alors $\frac{2}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{2}$

$0 \leq \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)} \leq 0$

d'où $(\forall x > 1)$: $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

0,5

6)

On a :

$\forall x \in [1,+\infty[$: $f'(x) \leq 0$

donc f décroissante sur $[1,+\infty[$.

x	1 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2} \searrow 0$

car $f(1) = \frac{1}{2}$

$\lim_{+\infty} f(x) = 0^+$

0,5

b)

Traçage de $(\mathcal{C}f)$

On a : $D_f = [1,+\infty[$ avec $f(1) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{+\infty} f(x) = 0^+$

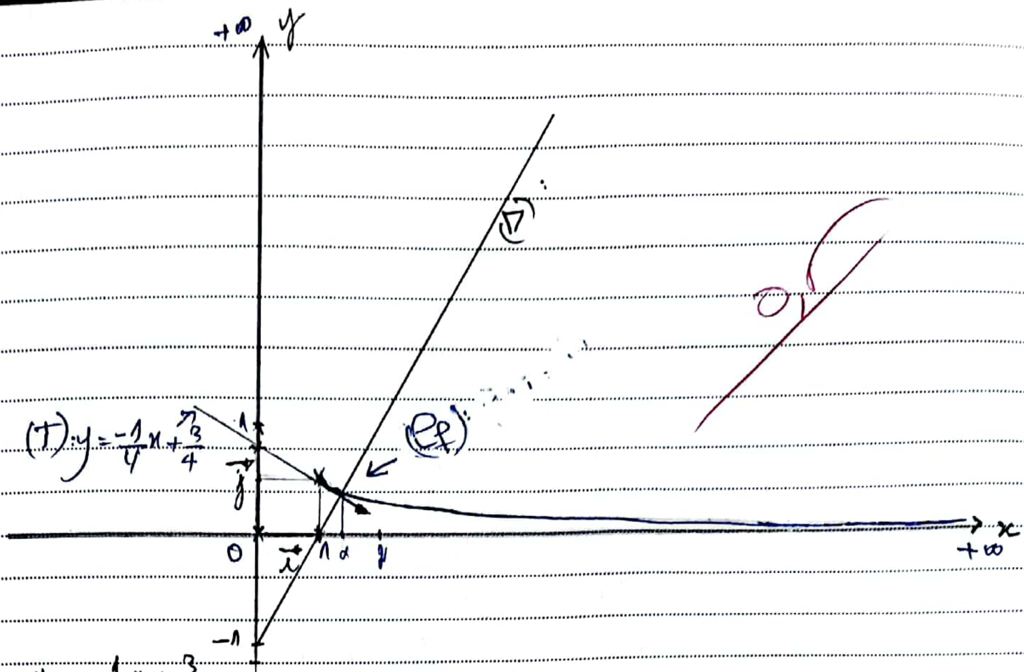
On a : f est décroissante sur $[1,+\infty[$

$\mathcal{C}f$ admet une asymptote horizontale (ox) : $y = 0$

$(\mathcal{C}f)$ admet une demi tangente au point d'abscisse 1

(T) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

NOTATION PARTIELLE



$y: -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

x	y
0	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{2}$

7-) soit

La droite (Δ) d'équat° $y = x-1$.

on trace la droite

On observe graphiquement que la droite (Δ) coupe la courbe de f en un point unique

donc l'équat° $f(x) = x-1$ admet une seule solut° α et que $\alpha \in]1,2[$

0,5

8-)

a- soit $n \in \mathbb{N}$

On a f est une fonct° continue et dérivable sur $[1,+\infty[$ en particulier sur l'intervalle de borne α et a_n I

d'après le théorème des

$\exists c \in I$: $\frac{f(a_n) - f(\alpha)}{a_n - \alpha} = f'(c)$

donc:

$\exists c \in I$ $\frac{a_{n+1} - 1 - (\alpha - 1)}{a_n - \alpha} = f'(c)$

car

$\begin{cases} f(a_n)+1 = a_{n+1} \\ f(\alpha) = \alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_n) = a_{n+1} - 1 \\ f(\alpha) = \alpha - 1 \end{cases}$

0,5

donc:

$(\exists c \in I)$: $\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} = f'(c)$

$\Rightarrow$ $|a_{n+1} - \alpha| = |f'(c)|\,|a_n - \alpha|$

On a d'après 5-a : $(\forall x \in]1,+\infty[)$ $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

$\Rightarrow$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

TOTAL NOTE/PAGE

1,5

EXAMEN D'OBTENTION DU CERTIFICAT DU BACCALAUREAT

Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale du Préscolaire et des Sports

Série ou Option : ....

Date d'examen : ....

Matière de : ....

Numéro d'archivage

Nom et Signature du correcteur : ....

Note globale	
En chiffres	....../20
En lettres	....

NOTATION PARTIELLE

b/

on pose : $u = F^{-1}(t)$

on a : pour $t = 0$: $F^{-1}(0) = 0 \Rightarrow u = 0$

pour $t = \beta$: $F^{-1}(\beta) = 1 \Rightarrow u = \beta$

On a

$u = F^{-1}(t)$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dF} = \dfrac{dF^{-1}(t)}{dF} = \dfrac{1}{\frac{dF(t)}{dF}} = \dfrac{1}{e^{u^2}}$

$\Rightarrow du \times e^{u^2} = dt$

$\Rightarrow dt = du\, e^{u^2}$

d'où

$l = \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^\beta F^{-1}(t)\,dt$

$= \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^1 u \times e^{u^2} du$

$l = \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^1 u e^{u^2} du$

0,1

c–

On a $l = \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^1 u e^{u^2} du$

$= \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{2u}{2} e^{u^2} du$

$= \dfrac{1}{2\beta}\displaystyle\int_0^1 2u e^{u^2} du$

$= \dfrac{1}{2\beta}\displaystyle\int_0^1 (e^{u^2})' du$

$= \dfrac{1}{2\beta}\left[e^{u^2}\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{2\beta}\left(e^{(1)^2} - e^{(0)^2}\right)$

$= \dfrac{1}{2\beta}(e-1)$

alors $l = \dfrac{e-1}{2\beta}$.

0,1

TOTAL NOTE/PAGE

1

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

NOTATION PARTIELLE

Exercice 3

Partie II :

3) b)

On a : OM_1M_2 rectangle en O

$\Leftrightarrow \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = 2$

On a

$(z_1 - z_2)^2 = \Delta = -4(1+\alpha)$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = |-4(1+\alpha)|$

$\Leftrightarrow 2^2 = 4|1+\alpha|$

$\Leftrightarrow |1+\alpha| = 1$

$\Leftrightarrow |z_\Omega - (-1)| = 1$

$\Leftrightarrow \Omega A = 1$ avec $A(-1)$

donc

$\Omega \in \mathcal{C}_{(-1,1)}$: cercle de rayon 1 et de centre $A(-1)$

Exercice 03

partie I :

2)

On a z_1 et z_2 sont les deux solut° de (E_α)

donc

$(z - z_1)(z - z_2) = 0$

$\Rightarrow z^2 - z_1 z - z_2 z + z_1 z_2 = 0$

$\Rightarrow z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0$

par égalité de deux polynôme :

$\begin{cases} -(z_1 + z_2) = -2i \\ z_1 \times z_2 = \alpha \end{cases}$

alors

$z_1 + z_2 = 2i$ et $z_1 \times z_2 = \alpha$.

1

0,5

TOTAL NOTE/PAGE

1,5

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

النقطة الجزئية

d'où $|f(c)| \leqslant \frac{1}{2}$ car $c \in I \subset [1, +\infty[$

donc :

$(\forall n \in \mathbb{N})$: $|a_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2} |a_n - a|$

b-

soit $n \in \mathbb{N}$

pour $n = 0$ on a : $|a_0 - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0 - a|$

vraie

donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que : $(\exists n \in \mathbb{N})$: $|a_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$

M-q : $|a_{n+1} - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - a|$

On a :

$|a_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$

et d'après 8-a.

$|a_{n+1} - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right) |a_n - a|$

donc on multiplie les deux inégalité :

$|a_{n+1} - a| \cancel{|a_n - a|} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \cancel{|a_n - a|} |a_0 - a|$

car $|a_n - a| > 0$

$\Rightarrow$

$|a_{n+1} - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - a|$

d'après principe de récurrence :

$(\forall n \in \mathbb{N})$:

$|a_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$

c-

On a : $\lim_{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

d'où

$\lim_{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a| = 0$

d'où

$\lim_{+\infty} |a_n - a| = 0$

$\Rightarrow$ $\lim_{+\infty} a_n = a$

d'où

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est a.

Exercice 02 :

1)

a-

on a : $t \to t^2$ continue sur $\mathbb{R}$ et $(\forall t \in \mathbb{R})$: $t^2 \in \mathbb{R}$

comme

$t \to e^t$ continue sur $\mathbb{R}$

alors $g : t \to e^{t^2}$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, 1]$

comme F est la primitive de g qui s'annule en 0

0,5

0,25

0,25

مجموع نقط الصفحة

1

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

امتحان نيل شهادة البكالوريا

الشعبة أو المسلك : ....
تاريخ الامتحان : ....
المادة : ....

النقطة النهائية	
بالأرقام	....../20
بالحروف	....

إسم وتوقيع المصحح(ة) : ....

رقم الأرشفة

النقطة الجزئية

Donc F est dérivable sur [0,1]
par conséquent F continue sur [0,1]
et On a
$\forall (x \in \mathbb{R}) : e^{x} > 0$
donc $e^{t^2} > 0$ $(\forall t \in \mathbb{R})$.
$\Rightarrow e^{t^2} > 0$ $\forall t \in [0,x]$

0,25

comme F est la primitive de $g : t \to e^{t^2}$ donc
$\forall t \in [0,x]$, $g(t) = F'(t)$
d'où $\forall x \in [0,1]$, $F'(x) > 0$
donc F est strictement croissante sur [0,1]

b-
On a : F continue sur [0,1]
F strictement croissante sur [0,1]
donc F réalise une bijection de [0,1] vers
F([0,1])

0,5

on a $F([0,1]) = [F(0), F(1)]$ car F continue et
croissante sur [0,1]
alors :
On a $F(0) = \int_0^0 e^{t^2} dt = 0$ et $F(1) = \int_0^1 e^{t^2} dt = \beta$
d'où
F est une bijection de [0,1] vers [0,β].

2)
a-
On a : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

$S_n = \frac{1}{\beta} \frac{(\beta - 0)}{n} \sum_{k=1}^{k=n} F^{-1}\left(0 + \frac{k(\beta - 0)}{n}\right)$

d'où $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une somme de Raiemen
et sa limite

0,5

$\lim_{+\infty} S_n = \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} F^{-1}(t) dt = l$

تنبيه : يمنع على المترشح(ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته(ا)

مجموع نقط الصفحة
1,25

النقطة الجزئية

$$= \left[\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{-1}{2t^2}\right)' dt$$

$$= \left[\ln(t)\right]_1^x - \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^x$$

$$= \ln(x) - \ln(1) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}$$

0,25

$$= \ln(x) + \frac{1-x^2}{2x^2}$$

$$I(x) = \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}$$

et On a

$$J(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(\frac{t^2}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$J(x) = \int_1^x 1 - \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$= \left[t + \frac{1}{t}\right]_1^x \quad \text{car } \int_1^x 1\,dt = [t]_1^x \text{ et } \int_1^x \frac{1}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$= x + \frac{1}{x} - 1 - 1$$

0,25

$$J(x) = \frac{x^2+1-2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$$

On a :

alors $\forall x \in [1, +\infty[$

$$I(x) = \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2} \quad \text{et} \quad J(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$$

c-

soit $x \in]1 ; +\infty[$

On a $x \to x^2 - 1$ polynôme dérivable et s'annule pas sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ en particulier sur $]1, +\infty[$

donc : $x \to \frac{1}{x^2-1}$ dérivable sur $]1, +\infty[$

et

$x \to \ln(x)$ dérivable sur $]0, +\infty[$ en particulier sur $]1, +\infty[$.

donc $x \to f(x)$ dérivable sur $]1, +\infty[$ étant produit de deux fcts dérivables sur $]1, +\infty[$.

$(\forall x \in]1, +\infty[)$:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{(x^2-1)}\right)' = \frac{(x^2-1)\ln'(x) - (x^2-1)'\ln(x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)\times\frac{1}{x} - 2x\ln(x)}{(x^2-1)^2}$$

مجموع نقط الصفحة

0,5

تنبيه: يمنع على المترشح(ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته(ا)

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

امتحان نيل شهادة البكالوريا

الشعبة أو المسلك : ....
تاريخ الامتحان : ....
المادة : ....

النقطة النهائية	
بالأرقام	....../20
بالحروف	....

إسم وتوقيع المصحح(ة) : ....

رقم الأرشقة

النقطة الجزئية

D'où $f'(x) = \dfrac{x^2-1-2x^2\ln(x)}{x(x^2-1)^2}$

$= -\dfrac{-x^2+1+2x^2\ln(x)}{x(x+1)^2(x-1)^2}$

$= -\dfrac{2x^2\ln(x)-x^2+1}{x(x-1)^2} \times \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$= -\dfrac{2x^2\ln(x)-x^2+1}{2x(x-1)^2} \times \dfrac{2}{(x+1)^2}$

$= -\dfrac{2}{(x+1)^2} \times \dfrac{2x^2\ln(x)-x^2+1}{2x(x-1)^2}$

$= -\dfrac{2}{(x+1)^2} \times \dfrac{2x^2\ln(x)-x^2+1}{\frac{2x^2(x-1)^2}{x}}$

0,5

$= -\dfrac{2}{(x+1)^2} \times \dfrac{2x^2\ln(x)-x^2+1}{2x^2} \times \dfrac{x}{(x-1)^2}$

$= -\dfrac{2}{(x+1)^2} \times \dfrac{\cancel{2x^2}\left(\ln(x)-\frac{x^2-1}{2x^2}\right)}{\cancel{2x^2}} \times \dfrac{1}{\frac{(x-1)^2}{x}}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^2} \times \left(\ln(x) - \dfrac{x^2-1}{2x^2}\right) \times \dfrac{1}{\frac{(x-1)^2}{x}}$

d'où $\forall x \in]1,+\infty[$:

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2} \times \dfrac{I(x)}{J(x)}$

d-

soit $x \in]1,+\infty[$

on a d'après 5-a

$(\forall x \in]1,+\infty[),\quad 0 \leq I(x) \leq J(x)$

$\Rightarrow \forall x \in]1,+\infty[,\quad \dfrac{I(x)}{J(x)} \leq 1$

et on a $\forall x \in]1,+\infty[,\quad x+1 \geq 2$

$\Rightarrow (x+1)^2 \geq 4$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(x+1)^2} \leq \dfrac{1}{4}$

تنبيه : يمنع على المترشح(ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته(ا)

مجموع نقط الصفحة
0,5

النقطة الجزئية

Exercice 01 :

1)

On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} = 1 \times \frac{1}{1+1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

car :

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

0,1

On a :

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

donc f est continue à droite en 1.

2)

$\lim\limits_{+\infty} f(x)$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x^2})}{x^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$

0,25

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln(x^2)}{x^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$

$= 0$

car $\lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$

et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$

On a :

0,25

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow (C_f)$ admet une asymptote horizontale d'équat. $y = 0 : (OX)$ au voisinage de $+\infty$

3)

a-

Soit $x \in]1;+\infty[$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$: $t = (x-1)^2$

On a :

$\frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t} = \frac{-\sqrt{(x-1)^2} + \ln(1+\sqrt{(x-1)^2})}{(x-1)^2}$

0,25

$= \frac{-|x-1| + \ln(1+|x-1|)}{(x-1)^2}$

On a : $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$

d'où

$\frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} = \frac{-(x-1)+\ln(1+(x-1))}{(x-1)^2} = \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}$

مجموع نقط الصفحة

1,25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

امتحان نيل شهادة البكالوريا

الشعبة أو المسلك : ....
تاريخ الامتحان : ....
المادة : ....

النقطة النهائية	
بالأرقام	....../20
بالحروف	....

إسم وتوقيع المصحح(ة) : ....

رقم الأرشفة

النقطة الجزئية

b)

soit $t>0$.

On a : $t \to 1+\sqrt{t}$ dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall t>0$

$1+\sqrt{t} \geq 1 > 0$

comme $t \to \ln(t)$ dérivable sur $]0,+\infty[$

alors $t \to \ln(1+\sqrt{t})-\sqrt{t}$ dérivable sur $]0,+\infty[$ et continue sur $[0,+\infty[$

car $\lim\limits_{0} \ln(1+\sqrt{t})-\sqrt{t} = \ln(1)-\sqrt{0} = 0 = (\ln(1+\sqrt{0})+\sqrt{0})$

donc :

$t \to \ln(1+\sqrt{t})-\sqrt{t}$ continue sur $[0,t]$

$t \to \ln(1+\sqrt{t})-\sqrt{t}$ dérivable sur $]0,t[$

et $\forall x \in]0,t[: (-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{x}))' = (\sqrt{x} + \frac{(1+\sqrt{x})'}{1+\sqrt{x}}) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d'après le théorème des accroissements finis :

$\exists c \in]0,t[: \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})-\ln(1+\sqrt{0})+0}{t-0} = \frac{1}{2\sqrt{c}(1+\sqrt{c})} - \frac{1}{2\sqrt{c}}$

$\Rightarrow$

$\exists c \in]0,t[: \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} = \frac{1}{2\sqrt{c}(1+\sqrt{c})} - \frac{1}{2\sqrt{c}}$

0,5

$\exists c \in]0,t[: \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} = \frac{1-(1+\sqrt{c})}{2\sqrt{c}(1+\sqrt{c})} = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-\sqrt{c}}{2\sqrt{c}(1+\sqrt{c})}$

$\exists c \in]0,t[: \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} = \frac{-1}{2(1+\sqrt{c})}$

On a :

$0 < c < t$

$\Rightarrow \quad 0 < \sqrt{c} < \sqrt{t} \Rightarrow 1 < (1+\sqrt{c}) < 1+\sqrt{t}$

$\Rightarrow \quad 0 < 2 < 2(1+\sqrt{c}) < 2(1+\sqrt{t})$

$\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{2(1+\sqrt{t})} < \frac{1}{2(1+\sqrt{c})} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{c})} < -\frac{1}{2(1+\sqrt{t})}$

d'où $\forall t>0$:

$$-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$$

مجموع نقط الصفحة
0,5

تنبيه : يمنع على المترشح(ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته(ا)

النقطة الجزئية

Exercice 04 :

1) a-

on a $(i, 2) T (1, i) = (i \times \bar{i} + 1 ; 2i) = (i(-i)+1, 2i) = (2, 2i)$

on a $(1, i) T (i, 2) = (1 \times \bar{2} + i ; 2i) = (2+i, 2i)$ 0,5

b-

On a : $\exists ((a,b),(c,d)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^2 : (a,b) T (c,d) \neq (c,d) T (a,b)$

donc T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ 0,25

2)

soient $((a,b),(c,d),(m,n)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^3$:

On a $((a,b) T (c,d)) T (m,n)$

$= (a\bar{d} + c, bd) T (m,n)$

$= ((a\bar{d}+c)\bar{n} + m, bdn)$

$= (a\bar{d}\bar{n} + \bar{n}c + m, bdn)$ 01

$= (a\bar{d}\bar{n} + (\bar{n}c+m), b \times dn)$

$= (a,b) T ((c\bar{n}+m, dn))$

$= (a,b) T ((c,d) T (m,n))$

on a

$\forall ((a,b),(c,d),(m,n)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^3$:

$((a,b) T (c,d)) T (m,n) = (a,b) T ((c,d) T (m,n))$

donc T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

3)

soit $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ 0,25

On a $(a,b) T (0,1) = (a\bar{1} + 0, b \times 1) = (a,b)$

et $(0,1) T (a,b) = (0\bar{b} + a, 1b) = (a,b)$

donc

$\forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* : (a,b) T (0,1) = (0,1) T (a,b) = (a,b)$

donc : $(0,1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

4)

a- soit $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ 0,5

On a $(a,b) T \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = \left(a \times \frac{1}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right), b \times \frac{1}{b}\right)$

$= \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b}, \frac{b}{b}\right) = (0,1)$

b-

soit $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

on a $\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) T (a,b) = \left(-\frac{a}{b} \times \bar{b} + a, \frac{1}{b} \times b\right) = (0,1)$ 01

et comme $(a,b) T \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = (0,1)$

donc (a,b) admet un élément symétrique $\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

par la loi T

alors on a :

T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

T admet élément neutre $(0,1)$ ds $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

مجموع نقط الصفحة 4,5

Scanné avec CamScanner

امتحان نيل شهادة البكالوريا

الشعبة أو المسلك : ....

تاريخ الامتحان: ....

المادة: ....

النقطة النهائية	
..../20	بالأرقام
....	بالحروف

إسم وتوقيع المصحح(ة): ....

رقم الأرشفة

النقطة الجزئية

* Tous les élément de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ sont symétrisables par la loi T.

* T non commutative

donc

$(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, T)$ est un groupe non commutatif.

5)

a-

On a $\forall (a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* : (a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

donc $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)\subset(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*)$

On a: $(0,1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ donc $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\neq\phi$

soient (a,b) et (c,d) deux élément de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

On a :

$(a,b)T(c,d) = (a\bar{d}+c, bd) = (ad+c, bd)$

car $(\forall z\in\mathbb{R}) : \bar{z} = z$

0,5

On a $\forall ((a,b),(c,d))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

$(a,b)T(c,d)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

car + et × deux lois de composition internes dans $\mathbb{R}$

d'où $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est une partie stable pour la loi T.

b-

soient (a,b) et (c,d) deux éléments de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

et $\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)$ le symétrique de (c,d) par la loi T

On a $(a,b)T\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right) = \left(a\times\frac{1}{d}-\frac{c}{d},\frac{b}{d}\right) = \left(\frac{a-c}{d},\frac{b}{d}\right)$

$= \left(\frac{a-c}{d},\frac{b}{d}\right)$ car $(\forall z\in\mathbb{R}) : \bar{z} = z$

0,5

On a:

$\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* : (a,b)T\,sym(c,d)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

et $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ partie stable du groupe $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, T)$

donc

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, T)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, T)$

مجموع نقط الصفحة

1

تنبيه: يمنع على المترشح(ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته(ا)