Université My Ismail
Ensam–Meknès

Année universitaire : 08-09
22 juillet 2009

Concours d'accès en première année
Sciences Mathématiques A et B
Epreuve de Mathématiques. Durée : 3h30mn.
L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 (**Chaque question est sur 3 points**)
Toutes les questions sont indépendantes.

Des affirmations sont données ci-dessous. Dire si chacune de ces affirmations est vraie ou fausse (=2pts), et si, en plus, la réponse est justifiée (=1pt).

1. *Soit la fonction définie par* $f(x) = (1 + x^2)e^x$ *pour tout* x *réel.* *Affirmation :* *La courbe représentative de* f *est toujours située au dessus de l'axe des abscisses.*
2. *Soit* g *la fonction définie par* $g(x) = 2x - \frac{1}{x+1}$ *pour tout* $x \in]-1, +\infty[$*. On note* (C) *la courbe représentative de* g *et* A *le point d'abscisse 0.* *Affirmation :* *La tangente à* (C) *en* A *a pour équation* $y = 2x - 1$.
3. *Soient deux événements* A *et* B*. On suppose que la probabilité de* A *est égale à 0,4 et que la probabilité de l'évenement* $\overline{A} \cap B$ *est égale à 0,12.* *Affirmation :* *la probabilité de* B *sachant que* $\overline{A}$ *est réalisé est égale à 0,2.*
4. *On lance deux dés cubiques équilibrés et on lit la somme des résultats des faces supérieures.* *Affirmation :* *La probabilté d'obtenir une somme égale à 5 est égale à 5/36.*
5. *Soient* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues et commutant par composition :* $f \circ g = g \circ f$. *Affirmation :* *Il existe* $a \in [0,1]$ *tel que* $f(a) = a$.
6. *Soit l'équation différentielle* $(E) : y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^x$. *Affirmation :* *la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = (x^2 + 4x + 7)e^x$ *est solution de* (E).

Exercice 2 (**Chaque question et sous-question est sur 2 points**)
Toutes les questions sont indépendantes.

1. *Montrer que le polynôme* $P(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos(n\alpha) - x\sin(n\alpha)$ *est divisible par* $x^2 + 1$*, où* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Donner l'équation de la courbe définie par* $Re(\frac{1}{z}) = 1/4$*, pour* $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$.
3. *Trouver l'ensemble des points du plan* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *dans les cas suivants :*
   (a) $|z| > 2 + Im(z)$.
   (b) $|z| - Re(z) \leqslant 0$.

4. *Supposons que* $2\log(x-2y) = \log x + \log y$ *pour* x, y *réels dans leurs domaines de définition. Calculer* $\frac{x}{y}$.

5. *On définit la suite de fonctions*

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x};\ f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x)), \text{pour } n \geqslant 1.$$

Calculer $f_{2009}(2009)$.

Exercice 3 (Chaque question est sur 2 points)
Calculer les limites $\lim_{n\to+\infty} u_n$ *des suites suivantes dans les cas suivants :*

$(a) u_n = \frac{\cos n}{n}$. $(b) u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$. $(c) u_n = (1 + \frac{1}{2}\sin n)^{\frac{1}{n}}$.
$(d) u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. $(e) u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$. $(f) u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 4 (Chaque question est sur 2 points)
Calculer les intégrales suivantes

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin(x) dx. \quad (b) \int_0^1 x \arctan(x) dx. \quad (c) \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} dx.$$

Exercice 5
On considère l'équation

$$x^n + y^n = z^n. \tag{1}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ *pair et* $x, y \in \mathbb{N}$ *impairs.*

1. *Trouver les carrés de* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ *(i.e. l'ensemble des* $a \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ *tel qu'il existe* $b \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ *avec* $b^2 \equiv a (\text{mod } 8)$*).* (2pts)
2. *Montrer que si* $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ *est solution de l'équation (1), alors* $x^2 \equiv 1 (\text{mod } 8)$ *et* $y^2 \equiv 1 (\text{mod } 8)$*. En déduire que* $x^n \equiv y^n \equiv 1 (\text{mod } 8)$. (3pts)
3. *En déduire que l'équation (1) n'a pas de solution pour* n *pair et* x, y *impairs.* (2pts)

Exercice 6
On considère l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$*, pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que* f *est bijective, que* $f(-x) = -f(x)$ *et que* $f(0) = 0$. (4pts)
2. *Montrer que* f *préserve le signe (i.e. si* $x > 0$*, alors* $f(x) > 0$*, et si* $x < 0$*, alors* $f(x) < 0$*.)* (1pt)
3. *Montrer que pour tout* $x > 0$*, on a* $f(x - f(x)) = -(x - f(x))$. (1pt)
4. *En déduire que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $f(x) = x$. (1pt)